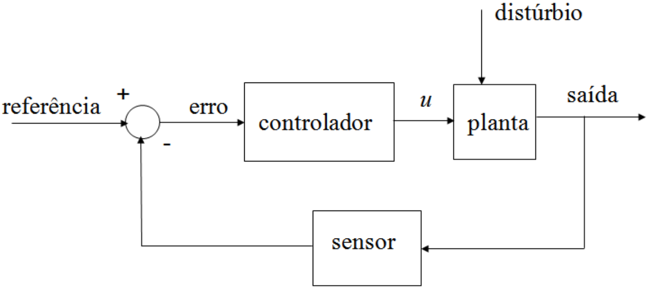
SEM 536 - Sistemas de Controle I
Aula 3 - A - Resposta no Tempo

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

Estrutura básica de um sistema realimentado



- Equação do movimento

$$M\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + Ky(t) = u(t)$$

sendo M a massa, B a constante do amortecedor, K a constante de rigidez da mola.

- Condições iniciais nulas: $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$

Transformada de Laplace

- Aplicando a propriedade da diferenciação:

$$Ms^2Y(s) + BsY(s) + KY(s) = U(s)$$

- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$

Função de Transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)}$$
$$G(s) = K\frac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)}$$

z_i: zeros de $G(s)$
p_i: polos de $G(s)$

Sistema de primeira ordem

- Sistema de primeira ordem padrão:

$$\dot{y}(t) + \sigma y(t) = u(t)$$

- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s + \sigma}$$

- Polo: $p = -\sigma$

Sistema de primeira ordem

- Polo: $p = -\sigma$
- Resposta ao impulso unitário ($U(s) = 1$):

$$y(t) = e^{-\sigma t}$$

- Se $\sigma > 0$, polo $p < 0 \Rightarrow$ **estável**
- Se $\sigma < 0$, polo $p > 0 \Rightarrow$ **instável**

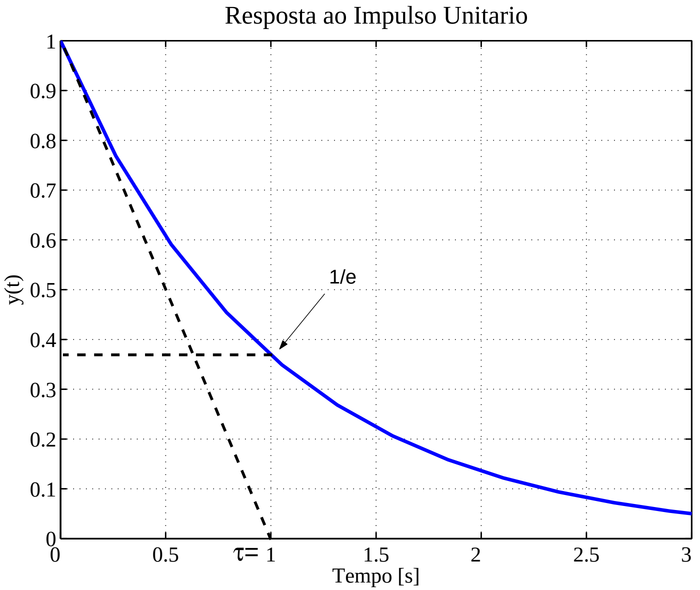
Sistema de primeira ordem

- Constante de tempo:

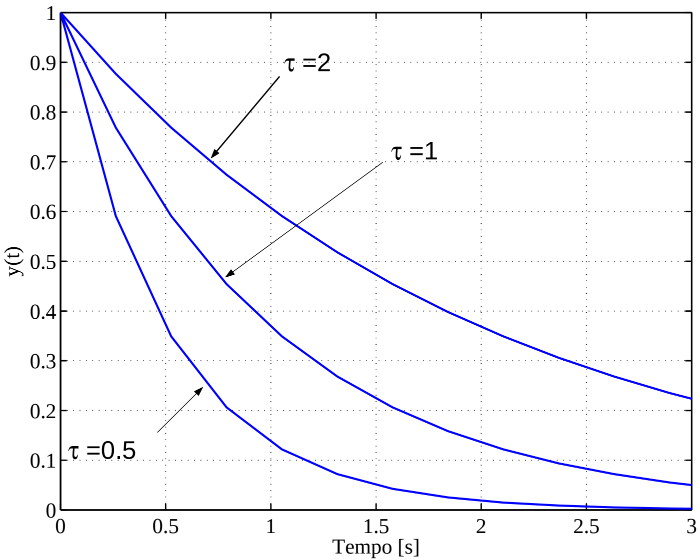
$$\tau = \frac{1}{\sigma}$$

- Instante em que a resposta é $\frac{1}{e}$ vezes o valor inicial.
- Se $\tau = 2$ s, $\sigma = 0,5$ e $p = -0,5$
- Se $\tau = 0,5$ s, $\sigma = 2$ e $p = -2$

Resposta ao impulso unitário: $\sigma = 1$



Resposta ao impulso unitário



Resposta ao degrau unitário

- Entrada (degrau unitário):

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

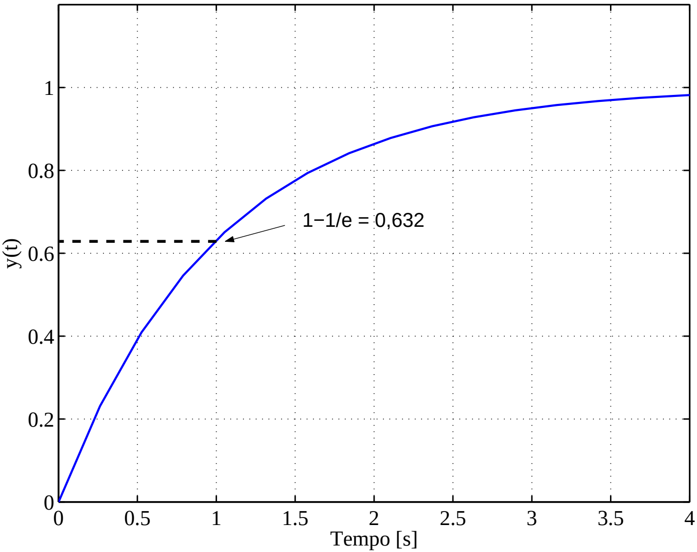
- Saída:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+\sigma)} = \frac{1/\sigma}{s} - \frac{1/\sigma}{s+\sigma}$$

- Resposta no tempo:

$$y(t) = \frac{1}{\sigma}(1 - e^{-\sigma t})$$

Resposta ao degrau unitário: $\sigma = 1$



Sistema de segunda ordem

- Sistema de segunda ordem padrão:

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = K_R\omega_n^2 u(t)$$

- ω_n: freqüência natural não amortecida (rad/s)
- ζ: fator de amortecimento
- K_R: ganho de regime

Sistema de segunda ordem

- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{K_R \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Equação Característica:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

- Polos:

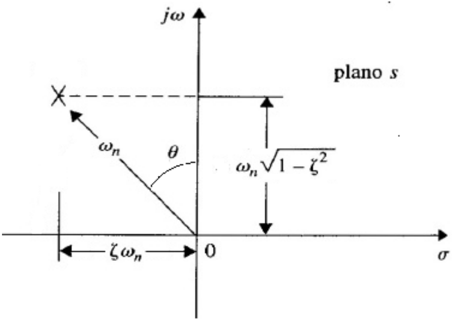
$$p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \left(\sqrt{1-\zeta^2}\right) j$$

Sistema de segunda ordem

- Polos:

$$p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \left(\sqrt{1-\zeta^2}\right) j$$

- Plano s:



- Fator de amortecimento: $sen(\theta) = \zeta$

Sistema de segunda ordem

- Polos:

$$p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \left(\sqrt{1-\zeta^2}\right) j$$

- Casos:
  - $\zeta = 0$, sistema não amortecido
  - $0 < \zeta < 1$, sistema subamortecido
  - $\zeta = 1$, sistema criticamente amortecido
  - $\zeta > 1$, sistema sobreamortecido

Sistema não amortecido ($\zeta = 0$)

- Polos: $p = \pm\omega_n j$
- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{K_R\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

- Resposta ao impulso unitário:

$$y(t) = K_R\omega_n sen(\omega_n t)$$

Sistema subamortecido $(0 < \zeta < 1)$

- Polos:

$$p = -\zeta\omega_n \pm \omega_d j$$

com $\omega_d = \omega_n(\sqrt{1-\zeta^2})$, freqüência natural amortecida.

- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{K_R\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

Sistema subamortecido $(0 < \zeta < 1)$

- Resposta ao impulso unitário:

$$y(t) = \frac{K_R \omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} sen(\omega_d t)$$

Sistema criticamente amortecido ($\zeta = 1$)

- Polos: $p = -\omega_n$
- Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{K_R \omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

- Resposta ao impulso unitário:

$$y(t) = K_R \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

Sistema sobreamortecido ($\zeta > 1$)

- Polos:

$$p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- Função de Transferência:

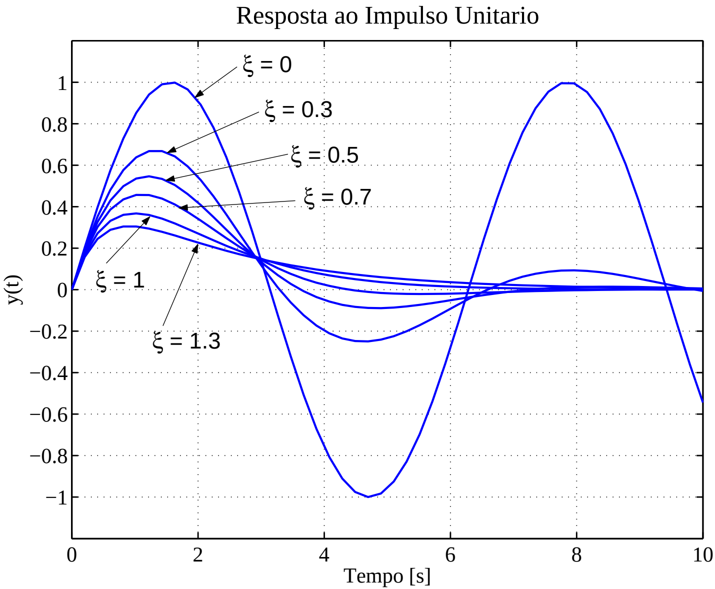
$$G(s) = \frac{K_R\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

Sistema sobreamortecido ($\zeta > 1$)

- Resposta ao impulso unitário:

$$y(t) = -\frac{K_R\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} + \frac{K_R\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$$

Resposta ao impulso unitário: $\omega_n = 1$, $K_R = 1$



Resposta ao degrau unitário

- Função de Transferência:

$$Y(s) = \frac{K_R \omega_n^2}{s\left[(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2\right]}$$

- Sistema subamortecido ($0 < \zeta < 1$):

$$y(t) = K_R \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} sen(\omega_d t)\right)\right]$$

Resposta ao degrau unitário

- Sistema não amortecido ($\zeta = 0$):

$$y(t) = K_R[1 - cos(\omega_n t)]$$

- Sistema criticamente amortecido ($\zeta = 1$):

$$y(t) = K_R[1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)]$$

Resposta ao degrau unitário

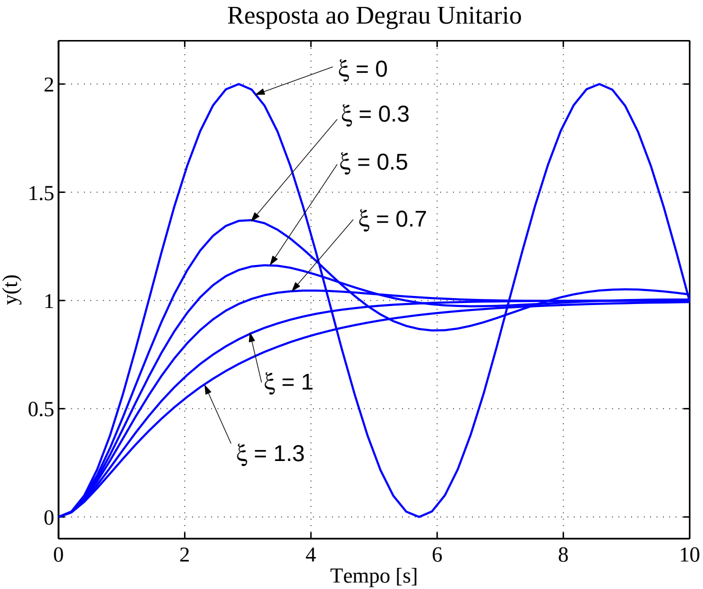
- Sistema sobreamortecido ($\zeta > 1$):

$$y(t) = K_R \left[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right) \right]$$

sendo $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ e

$$s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

Resposta ao degrau unitário: $\omega_n = 1$, $K_R = 1$



Resposta ao degrau unitário: $\zeta = 0.5$, $K_R = 1$