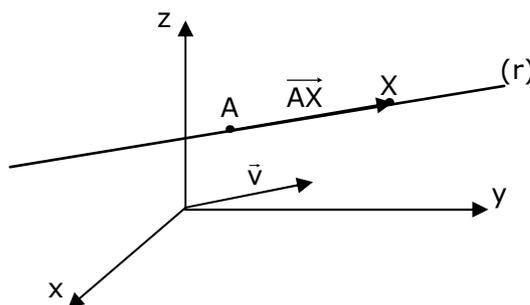


## CAPÍTULO 5

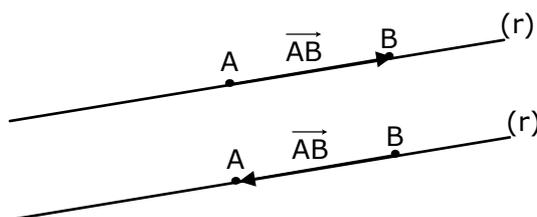
### RETA

**Definição:** Seja  $(r)$  uma reta que contém um ponto  $A$  e tem a direção de um vetor  $\vec{v}$ , com  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Para que um ponto  $X$  do  $\mathfrak{R}^3$  pertença à reta  $(r)$  deve ocorrer que os vetores  $\vec{AX}$  e  $\vec{v}$  sejam paralelos. Assim, existe um escalar  $t \in \mathfrak{R}$  tal que:  $\vec{AX} = t\vec{v} \Rightarrow X - A = t\vec{v} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A} + t\vec{v}$ . Esta expressão é chamada de **equação vetorial** da reta.

Observe que, para escrevermos a equação vetorial de uma reta  $(r): X = A + t\vec{v}$ , sempre necessitamos conhecer um ponto  $A$  de  $(r)$  e um vetor  $\vec{v}$  paralelo a ela. O vetor  $\vec{v}$  é chamado de **vetor diretor** da reta  $(r)$  e  $t \in \mathfrak{R}$  é chamado de **parâmetro**.



Por um axioma importante da geometria plana, dois pontos distintos,  $A$  e  $B$ , determinam uma reta. Logo, podemos escrever a equação vetorial da reta quando se conhece dois pontos pertencentes a ela, da seguinte forma: podemos considerar o vetor diretor da reta  $(r)$  como sendo o vetor  $\vec{AB}$  ou  $\vec{BA}$ , pois ambos são paralelos a reta  $(r)$ , assim como podemos escolher qualquer um dos pontos  $A$  ou  $B$  e escrever que  $(r): X = A + t \cdot \vec{AB}$  ou  $(r): X = A + t \cdot \vec{BA}$  ou  $(r): X = B + t \cdot \vec{AB}$  ou ainda  $(r): X = B + t \cdot \vec{BA}$ .



Por exemplo: considere a reta (r) determinada pelos pontos A(1,3,0) e B(-1,2,1). Então podemos escrever que  $(r): X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}, \quad \forall t \in \mathfrak{R} \Rightarrow (r): X = (1,3,0) + t \cdot (-2,-1,1)$  que é a equação vetorial da reta (r). Assim, para cada valor real do parâmetro t substituído na equação vetorial da reta vamos obter seus infinitos pontos, ou seja:

$$\text{para } t_1 = 0 \Rightarrow X_1 = (1,3,0) + 0 \cdot (-2,-1,1) \Rightarrow X_1 = (1,3,0) \in (r);$$

$$\text{para } t_2 = 1 \Rightarrow X_2 = (1,3,0) + 1 \cdot (-2,-1,1) \Rightarrow X_2 = (-1,2,1) \in (r);$$

$$\text{para } t_3 = -4 \Rightarrow X_3 = (1,3,0) + (-4) \cdot (-2,-1,1) \Rightarrow X_3 = (9,7,-4) \in (r);$$

Assim por diante.

## 5.1 Equações da Reta

### Equações Paramétricas da Reta

Sejam  $X(x, y, z)$  e  $A(x_0, y_0, z_0)$  onde, A é o ponto conhecido da reta e X representa qualquer ponto da reta, para algum valor de  $t \in \mathfrak{R}$ . Seja  $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$  o vetor diretor da reta (r). Assim, sua equação vetorial é  $(r): X = A + t\vec{v}$ . Substituindo as coordenadas de cada elemento da reta teremos:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (x_1, y_1, z_1) \cdot t \Rightarrow (r): \begin{cases} x = x_0 + x_1 t \\ y = y_0 + y_1 t \\ z = z_0 + z_1 t \end{cases}, \quad \forall t \in \mathfrak{R}. \text{ Esta forma de}$$

escrever é chamada de **equações paramétricas** da reta (r).

### Equações Simétricas da Reta

$$\text{Das equações paramétricas (r): } \begin{cases} x = x_0 + x_1 t \\ y = y_0 + y_1 t \\ z = z_0 + z_1 t \end{cases}, \text{ podemos escrever: } \begin{cases} t = \frac{x - x_0}{x_1} \\ t = \frac{y - y_0}{y_1} \\ t = \frac{z - z_0}{z_1} \end{cases}.$$

$$\text{Então: } (r): \frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1} \text{ para } x_1 \neq 0, y_1 \neq 0 \text{ e } z_1 \neq 0. \text{ Esta forma de}$$

escrever a equação da reta é chamada de **equações simétricas**.

## 5.2 Condição de alinhamento de três pontos

Sejam  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  e  $P_3(x_3, y_3, z_3)$  três pontos colineares, ou seja, alinhados. Logo, eles pertencem à mesma reta (r). Seja (r) a reta

determinada pelos pontos  $P_1$  e  $P_2$ . Então  $(r): X = P_1 + t\overrightarrow{P_1P_2}$ . Na forma simétrica

$(r): \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ . Como  $P_3$  pertence à reta  $(r)$ , ele satisfaz a equação

de  $(r)$ , ou seja:  $\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y_3-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ . Esta relação é chamada de condição de

alinhamento de três pontos, desde que  $x_2 - x_1 \neq 0$ ,  $y_2 - y_1 \neq 0$  e  $z_2 - z_1 \neq 0$ .

**Exemplo (1):** Dadas as retas na forma simétrica, destacar o ponto e o vetor diretor de cada uma.

a)  $(r): \frac{x-2}{-3} = y-1 = \frac{z+5}{2}$

b)  $(s): \frac{2x-2}{3} = -y-1 = \frac{3-z}{-2}$

c)  $(m): \frac{x-\frac{1}{3}}{2} = 2z-5$  e  $y = -4$

**Solução:** Lembre que, uma reta está na forma simétrica quando sua equação é

escrita como  $(r): \frac{x-x_0}{x_1} = \frac{y-y_0}{y_1} = \frac{z-z_0}{z_1}$  para  $x_1 \neq 0$ ,  $y_1 \neq 0$  e  $z_1 \neq 0$ , ou seja,

quando os coeficientes das variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  são todos iguais a 1. Neste caso, as coordenadas  $(-x_0, -y_0, -z_0)$ , que aparecem no numerador destas proporções são as coordenadas do ponto A da reta e as coordenadas  $(x_1, y_1, z_1)$  são as coordenadas do vetor diretor.

a)  $(r): \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{2} \Rightarrow \begin{cases} A(2,1,-5) \\ \vec{v} = (-3,1,2) \end{cases}$

b) A reta  $(s)$  não está adequadamente escrita na forma simétrica. Fazendo:

$(s): \frac{\frac{2x-2}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{-y-1}{-1}}{\frac{1}{-1}} = \frac{\frac{3-z}{-2}}{\frac{-1}{-1}}$ . Agora, na forma simétrica, vem:

$(s): \frac{x-1}{\frac{3}{2}} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} A(1,-1,3) \\ \vec{v} = \left(\frac{3}{2}, -1, 2\right) \end{cases}$

c) Neste caso em que temos um termo  $y = -4$ , escrevendo a equação na forma

paramétrica, vem:  $(m): \frac{x-\frac{1}{3}}{2} = 2z-5$  e  $y = -4$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x - \frac{1}{3}}{2} = t \Rightarrow x = \frac{1}{3} + 2t \\ y = -4 \Rightarrow y = -4 + 0t \\ 2z - 5 = t \Rightarrow z = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases} \Rightarrow (m): \begin{cases} x = \frac{1}{3} + 2t \\ y = -4 + 0t \\ z = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\left(\frac{1}{3}, -4, \frac{5}{2}\right) \\ \vec{v} = \left(2, 0, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

**Exemplo (2):** Dada a reta  $(r): X = (1, 1, -3) + t(2, 3, 1)$ , verificar se os pontos  $P(5, 7, -1)$  e  $Q(-5, -8, -2)$  pertencem à reta.

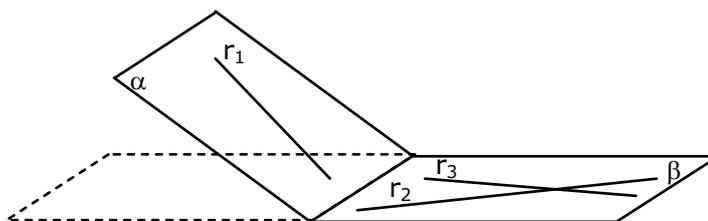
**Solução:** Se um ponto pertence a uma reta, ele deve satisfazer a equação simétrica da reta.

$$(r): \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{1} \Rightarrow \frac{5-1}{2} = \frac{7-1}{3} = \frac{-1+3}{1} \Rightarrow 2 = 2 = 2 \Rightarrow P \in (r)$$

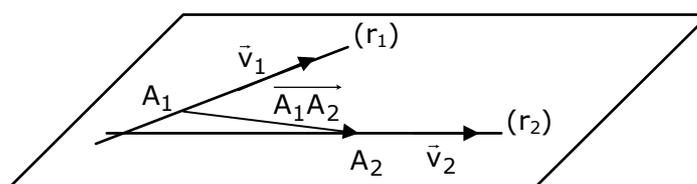
$$(r): \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{1} \Rightarrow \frac{-5-1}{2} = \frac{-8-1}{3} = \frac{-2+3}{1} \Rightarrow -3 = -3 \neq 1 \Rightarrow Q \notin (r)$$

### 5.3 Condição de coplanaridade entre duas retas

Dizemos que duas retas são coplanares se elas estão contidas no mesmo plano. Caso não exista um plano que as contém dizemos que elas não são coplanares. Por exemplo: as retas  $r_2$  e  $r_3$  são coplanares, pois estão contidas no mesmo plano  $\beta$ . As retas  $r_1$  e  $r_2$  não são coplanares, pois estão contidas em planos distintos. O mesmo ocorre entre as retas  $r_1$  e  $r_3$ , são retas não coplanares.



Sejam  $(r_1): X_1 = A_1 + t_1\vec{v}_1$  e  $(r_2): X_2 = A_2 + t_2\vec{v}_2$  duas retas coplanares com  $A_1(a_1, b_1, c_1)$ ,  $A_2(a_2, b_2, c_2)$ ,  $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ . Note que, se as retas são coplanares, então os vetores  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\overrightarrow{A_1A_2}$  são coplanares.



Logo, a condição de coplanaridade entre as retas é a mesma condição de coplanaridade entre os vetores  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\overrightarrow{A_1A_2}$ . Portanto:

$$[\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2] = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

#### 5.4 Posições Relativas entre duas retas

As posições relativas entre duas retas  $(r_1)$  e  $(r_2)$  são divididas em dois casos:

- I- Retas coplanares. Se  $(r_1)$  e  $(r_2)$  são retas coplanares então suas posições relativas são: paralelas ou concorrentes;
- II- Retas não coplanares. Se  $(r_1)$  e  $(r_2)$  são retas não coplanares a única posição relativa entre elas é reversas.

Existem alguns casos particulares como:

- Retas coincidentes é um caso particular quando as retas são paralelas.
- Retas perpendiculares é um caso particular quando as retas são concorrentes.
- Retas ortogonais é um caso particular quando as retas são reversas.

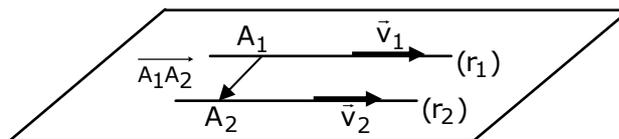
Para uma melhor discussão das posições relativas entre duas retas e, de uma forma fácil e rápida distinguir um caso do outro, vamos analisar cada posição relativa entre duas retas  $(r_1)$  e  $(r_2)$ .

Considere duas retas  $(r_1) : X_1 = A_1 + t_1\vec{v}_1$  e  $(r_2) : X_2 = A_2 + t_2\vec{v}_2$ .

**I - Retas coplanares:** Se as retas  $(r_1)$  e  $(r_2)$  são coplanares então  $[\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2] = 0$ .

**1) Retas Paralelas:** São retas coplanares, não se interceptam e o ângulo entre elas é  $\theta = 0^\circ$ . Analisando a dependência linear entre os vetores podemos concluir:

- $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  LD (paralelos)
- $\{\vec{v}_1, \overrightarrow{A_1A_2}\}$  LI (não paralelos)
- $\{\vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}\}$  LI (não paralelos)



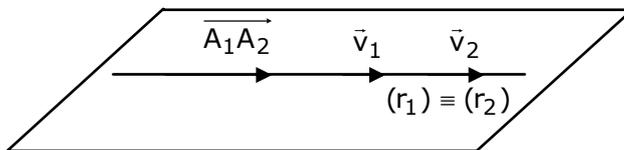
Usaremos a notação  $(r_1) \parallel (r_2)$  para indicar retas paralelas.

**2) Retas Coincidentes:** São retas coplanares, uma está posicionada inteiramente sobre a outra, a interseção entre elas é uma delas e o ângulo entre elas é  $\theta = 0^\circ$ . Analisando a dependência linear entre os vetores podemos concluir:

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \text{ LD (paralelos)}$$

$$\{\vec{v}_1, \overrightarrow{A_1A_2}\} \text{ LD (paralelos)}$$

$$\{\vec{v}_2, \overrightarrow{A_1A_2}\} \text{ LD (paralelos)}$$

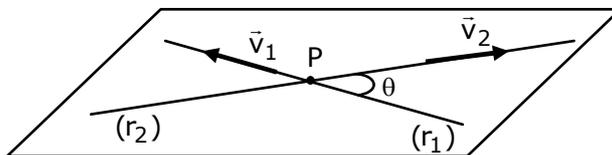


Usaremos a notação  $(r_1) \equiv (r_2)$  para indicar retas coincidentes.

**3) Retas Concorrentes:** São retas coplanares, se interceptam num ponto P e o ângulo entre elas é  $\theta \neq 90^\circ$ . Analisando a dependência linear e o produto escalar entre os vetores podemos concluir:

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \text{ LI (não paralelos)}$$

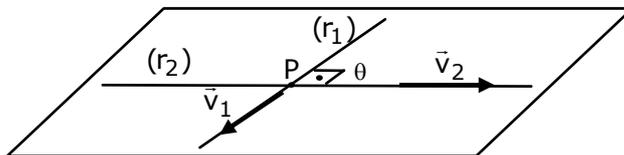
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \neq 0$$



**4) Retas Perpendiculares:** São retas coplanares, se interceptam num ponto P e o ângulo entre elas é  $\theta = 90^\circ$ . Analisando a dependência linear e o produto escalar entre os vetores podemos concluir:

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \text{ LI (não paralelos)}$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$



Usaremos a notação  $(r_1) \perp (r_2)$  para indicar retas perpendiculares.

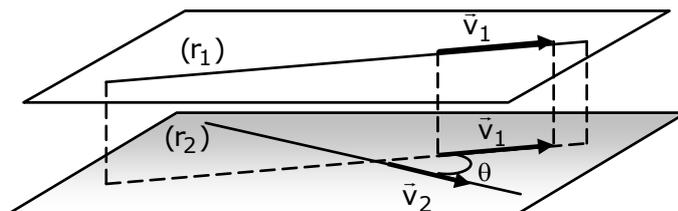
**II - Retas não coplanares:** Se as retas  $(r_1)$  e  $(r_2)$  não são coplanares então

$$[\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2] \neq 0.$$

**1) Retas Reversas:** São retas não coplanares, não se interceptam e o ângulo entre elas é  $\theta \neq 90^\circ$ . Analisando a dependência linear e o produto escalar entre os vetores podemos concluir:

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \text{ LI (não paralelos)}$$

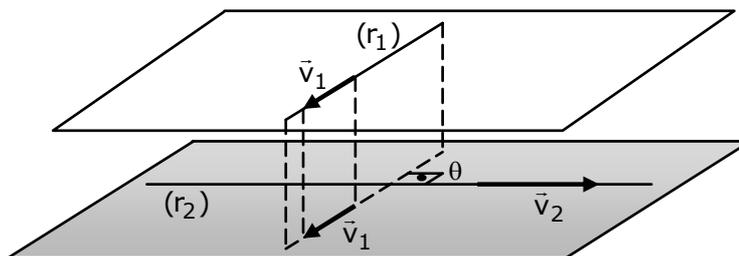
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \neq 0$$



**2) Retas Ortogonais:** São retas não coplanares, não se interceptam e o ângulo entre elas é  $\theta = 90^\circ$ . Analisando a dependência linear e o produto escalar entre os vetores podemos concluir:

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \text{ LI (não paralelos)}$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$



Com base a análise feita acima, sugerimos o seguinte resumo para distinguirmos as posições relativas entre duas retas  $(r_1)$  e  $(r_2)$ .

**Resumo:** Sejam  $(r_1) : X_1 = A_1 + t_1 \vec{v}_1$  e  $(r_2) : X_2 = A_2 + t_2 \vec{v}_2$ .

**I - Retas Coplanares**  $\Rightarrow [\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2] = 0$

1) Retas Paralelas:  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  LD (paralelos) e  $\{\vec{v}_1, \overrightarrow{A_1 A_2}\}$  LI (não paralelos).

2) Retas Coincidentes:  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  LD (paralelos) e  $\{\vec{v}_1, \overrightarrow{A_1 A_2}\}$  LD (paralelos).

3) Retas Concorrentes:  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  LI (não paralelos) e  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \neq 0$ .

4) Retas Perpendiculares:  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  LI (não paralelos) e  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ .

**II - Retas não Coplanares**  $\Rightarrow [\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2] \neq 0$

1) Retas Reversas:  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \neq 0$

2) Retas Ortogonais:  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

**Exemplo (3):** Dadas as retas  $(r) : \frac{x+1}{2} = y-2 = \frac{z-5}{-3}$  e  $(s) : \frac{x-3}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{4}$ ,

verificar a posição relativa entre elas e determinar a interseção se houver.

**Solução:** Para a reta  $(r)$  temos:  $\begin{cases} A_1(-1,2,5) \\ \vec{v}_1 = (2,1,-3) \end{cases}$  e para  $(s)$  temos:  $\begin{cases} A_2(3,4,-1) \\ \vec{v}_2 = (-2,2,4) \end{cases}$ .

Vamos determinar  $[\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]$  para sabermos se as retas são ou não

coplanares. Então:  $[\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2] = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ . Logo as retas são coplanares.

Como  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  LI (não paralelos) e  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -14 \neq 0$ , as retas são concorrentes e existe a interseção entre elas que é um ponto  $P(x,y,z)$ . Para determinar a

interseção devemos igualar as equações das retas (r) e (s). Assim, das retas (r) e (s) podemos escrever:

$$(r): \begin{cases} \frac{x+1}{2} = y-2 \Rightarrow x = 2y-5 \\ \frac{z-5}{-3} = y-2 \Rightarrow z = -3y+11 \end{cases} \text{ e } (s): \begin{cases} \frac{x-3}{-2} = \frac{y-4}{2} \Rightarrow x = -y+7 \\ \frac{z+1}{4} = \frac{y-4}{2} \Rightarrow z = 2y-9 \end{cases}$$

$2y-5 = -y+7 \Rightarrow y = 4$  e  $-3y+11 = 2y-9 \Rightarrow y = 4$ . Voltando a equação de (r) ou (s) e fazendo  $y = 4$ , teremos,  $x = 3$  e  $z = -1$ . Portanto, a interseção de (r) com (s) é o ponto  $P(3,4,-1)$ .

**Exemplo (4):** Determine os pontos de furos da reta  $(r): \frac{x}{-3} = \frac{y-4}{4} = z-4$ .

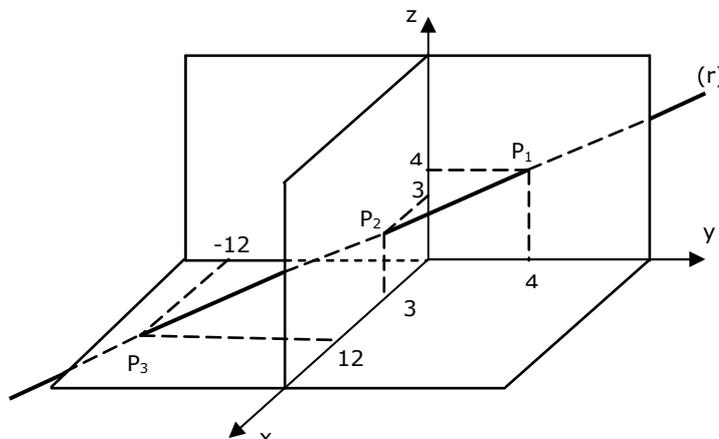
**Solução: Pontos de furo** de uma reta, são os pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , interseção da reta com os planos coordenados  $yz$ ,  $xz$  e  $xy$ , respectivamente. Para determinar o ponto onde a reta "fura" o plano  $yz$ , basta fazer a coordenada  $x = 0$  na equação da reta e determinar as outras coordenadas  $y$  e  $z$ . Analogamente para  $y = 0$  e  $z = 0$ , para determinar os pontos de furo sobre os planos  $xz$  e  $xy$ . Assim:

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{y-4}{4} = \frac{0}{3} \Rightarrow y = 4 \\ z-4 = \frac{0}{3} \Rightarrow z = 4 \end{cases} \Rightarrow P_1(0,4,4)$$

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{-3} = \frac{0-4}{4} \Rightarrow x = 3 \\ z-4 = \frac{0-4}{4} \Rightarrow z = 3 \end{cases} \Rightarrow P_2(3,0,3)$$

$$z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{-3} = 0-4 \Rightarrow x = 12 \\ \frac{y-4}{4} = 0-4 \Rightarrow y = -12 \end{cases} \Rightarrow P_3(12,-12,0)$$

Vamos representar estes pontos no  $\mathbb{R}^3$  e também a reta (r).



**Exemplo (5):** Determine a equação da reta (s) que é perpendicular à reta (r) :  $X = (2,0,0) + t(3,1,-1)$  e passa pelo ponto  $M(2,1,-1)$ .

**Solução:** Vamos determinar o ponto  $Q(x,y,z)$  que a interseção das retas (r) e (s) e escrever a equação da (s) que passa pelos pontos M e Q da seguinte forma

(s) :  $X = M + t \cdot \overrightarrow{QM}$ . Pela figura podemos notar que o vetor  $\overrightarrow{QA}$  é paralelo ao vetor  $\vec{v}$ , e ortogonal ao vetor  $\overrightarrow{QM}$ . Então:

$$\overrightarrow{QA} // \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{QA} = \alpha \cdot \vec{v} \Rightarrow (2-x, -y, -z) = \alpha \cdot (3,1,-1) \Rightarrow$$

$$Q: \begin{cases} 2-x = 3\alpha \Rightarrow x = -3\alpha + 2 \\ -y = \alpha \Rightarrow y = -\alpha \\ -z = -\alpha \Rightarrow z = \alpha \end{cases}$$

$$\overrightarrow{QM} \perp \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{QM} \cdot \vec{v} = 0$$

$$(2-x, 1-y, -1-z) \cdot (3,1,-1) = 0 \Rightarrow -3x - y + z + 8 = 0$$

$$-3(-3\alpha + 2) - (-\alpha) + \alpha + 8 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{11}$$

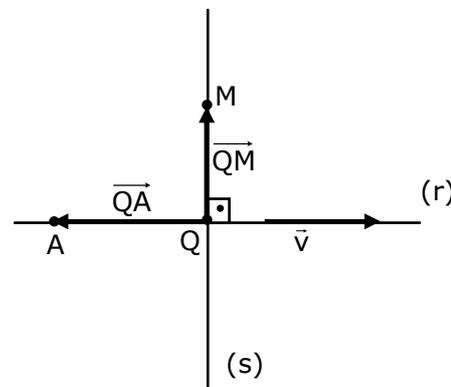
Determinando o ponto Q: 
$$\begin{cases} x = -3 \cdot \left(-\frac{2}{11}\right) + 2 \\ y = -\left(-\frac{2}{11}\right) \\ z = -\frac{2}{11} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{28}{11}, \frac{2}{11}, -\frac{2}{11}\right)$$
. Assim o vetor

$$\overrightarrow{QM} = \left(2 - \frac{28}{11}, 1 - \frac{2}{11}, -1 + \frac{2}{11}\right) = \left(-\frac{6}{11}, \frac{9}{11}, -\frac{9}{11}\right)$$
. Com  $\overrightarrow{QM}$  é o vetor diretor da reta

(s). Em particular seja  $\vec{u} = -\frac{11}{3} \cdot \overrightarrow{QM} = (2,-3,3)$ . Portanto a reta (s) será escrita

como  $X = M + t \cdot \vec{u}$ , ou seja, (s) :  $X = (2,1,-1) + t \cdot (2,-3,3)$ . Na forma simétrica

$$(s): \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{3}$$



### **Exercícios Propostos**

1) Verificar a posição relativa entre as retas e determinar a interseção quando houver:

a) (r) :  $x - 2 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{3}$  e (s) :  $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+14}{-2}$

Resp: a) Retas perpendiculares e  $(r) \cap (s) = P(-1,5,-10)$

b) (r) :  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{3}$  e (s) :  $\frac{x-1}{-2} = y-1 = \frac{z+2}{-3}$

Resp: a) Retas reversas e não existe  $(r) \cap (s)$

2) Determine a equação da reta suporte da altura relativa ao lado  $\overline{BC}$  do triângulo de vértices  $A(2,2,5)$ ,  $B(3,0,0)$  e  $C(0,6,0)$ . Resp:

$$(r): X = (2,2,5) + t(0,0,5)$$

3) Os pontos médios dos lados de um triângulo são os pontos  $M(2,1,3)$ ,  $N(5,3,-1)$  e  $P(3,-4,0)$ . Determine a equação da reta suporte do lado deste triângulo que contém o ponto M. Resp:  $X=(2,1,3)+t(2,7,-1)$

4) Escreva as equações simétricas da reta que passa pelo ponto  $A(5,-3,2)$  e é paralela ao eixo Oz. Resp:

$$x - 5 = y + 3 = 0 \text{ e } z - 2 = t$$

5) Determine os valores de  $k$  para que as retas sejam coplanares:

$$(r): \frac{x+1}{k} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2} \text{ e } (s): x-2 = \frac{y-k}{-2} = \frac{z-1}{3}. \text{ Resp:}$$

$$k = 4 \text{ ou } k = \frac{1}{3}$$

### COMENTÁRIOS IMPORTANTES

1) É muito comum e até natural que se introduza o estudo da reta quando ela é definida primeiramente no  $\mathfrak{R}^2$ . Muitas vezes, a reta é apresentada ao aluno como o gráfico da função linear  $f(x) = y = ax + b$ , sempre representada no  $\mathfrak{R}^2$  (no plano) e não de uma forma geométrica ou vetorial. Os cuidados que se deve tomar, neste capítulo, são: a) Nós estamos trabalhando sempre no  $\mathfrak{R}^3$  (as definições são diferentes quando trabalhamos com o  $\mathfrak{R}^2$ ); b) A reta aqui definida (no  $\mathfrak{R}^3$ ), tem uma definição vetorial e uma interpretação geométrica (não apenas o gráfico da função linear).

2) Quando estamos no  $\mathfrak{R}^2$  a função linear  $f(x) = y = ax + b$ , como a própria representação diz, temos  $y$  como função de  $x$ , ou seja:  $y = f(x)$ . Assim, a equação de uma reta é, por exemplo:  $y = 2x + 5$ . No  $\mathfrak{R}^3$  a função linear é expressa na forma  $y = ax + b$  e  $z = cx + d$ , tanto  $y$  com  $z$  são funções de  $x$ . Logo, a equação da reta é, por exemplo:  $y = 2x + 5$  e  $z = x - 3$ . Note que esta forma de escrever a equação da reta vem da forma simétrica, pois:  $y = 2x + 5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{2}$  e  $z = x - 3 \Rightarrow x = z + 3$ .

$$\text{Logo } x = \frac{y-5}{2} = z + 3.$$

3) É muito importante o aluno saber destacar da equação simétrica da reta o seu ponto e seu vetor diretor. Portanto, olhe o exemplo (1) e pratique um pouco.

4) Atenção às posições relativas entre retas. É muito comum o aluno afirmar que as retas são ortogonais (pertencem a planos diferentes) e achar a interseção. Ora, como isso é possível? Na verdade não é possível.

5) Outro erro muito comum é dizer que as retas são perpendiculares ou concorrentes e não são coplanares. Ora, isso não é possível. Reveja estes conceitos novamente e pense antes de afirmar alguma coisa.

6) Deve-se notar que uma reta é constituída de pontos. Como estamos introduzindo os conceitos vetoriais para definirmos e trabalhamos com as retas, é muito comum, quando utilizamos as equações da reta, confundir o que são pontos da reta e o que são vetores paralelos ou contidos na reta. Por exemplo: Considere a reta de equação simétrica (r):  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{3}$ . Como é comum representar um

vetor expressando somente suas coordenadas por  $\vec{v} = (x, y, z)$ , isso pode causar confusão com as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  dos pontos da reta, ou seja, as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  que aparecem na equação simétrica (bem como nas outras equações)

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{3}$ , são as coordenadas dos pontos da reta e não de um vetor

paralelo ou contido nela. Um vetor só será paralelo ou estará contido na reta se for múltiplo (ou seja, paralelo) ao vetor diretor da reta. No entanto, para que um ponto pertença à reta é necessário que ele satisfaça a equação da reta. Note que o ponto

$P(3,-4,3) \in (r)$ , pois:  $\frac{3-1}{2} = \frac{-4+3}{-1} = \frac{3}{3} \Rightarrow 1 = 1 = 1$ , mas o vetor  $\vec{v} = (3,-4,3)$  não é

paralelo à reta, pois o vetor diretor da reta é  $\vec{u} = (2,-1,3)$  que não é múltiplo do vetor  $\vec{v} = (3,-4,3)$ . Já o vetor  $\vec{w} = (4,-2,6)$  é paralelo à reta, pois é múltiplo do vetor

diretor, ou seja,  $\vec{w} = 2 \cdot \vec{u}$ , mas o ponto de coordenadas  $Q(4,-2,6) \notin (r)$ , pois:

$$\frac{4-1}{2} = \frac{-2+3}{-1} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} \neq -1 \neq 2.$$