Produto Misto de Vetores

MAT105 – 1/2020

Profa. Ana Paula Jahn

28 Julho 2020

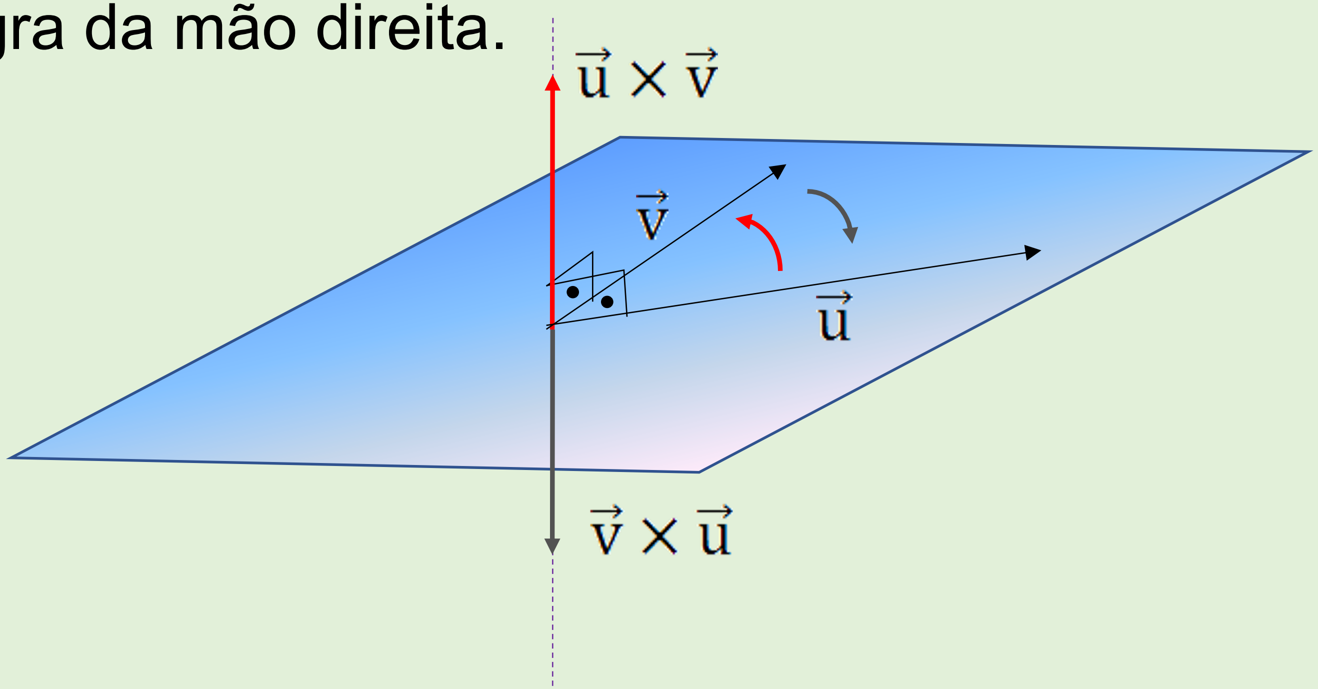
Relembrando: PRODUTO VETORIAL

Definição: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores quaisquer. O produto vetorial entre esses vetores, denotado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$, é o vetor com as seguintes características:

Módulo: $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\mathrm{sen}\,\theta$

Direção: Ortogonal ao vetor $\vec{u}$ e ortogonal a $\vec{v}$.

Sentido: Regra da mão direita.



Propriedades do Produto Vetorial

1) Não vale a comutativa: $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$

2) Anti − comutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

3) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, se um deles for o vetor nulo ou eles são paralelos.

4) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

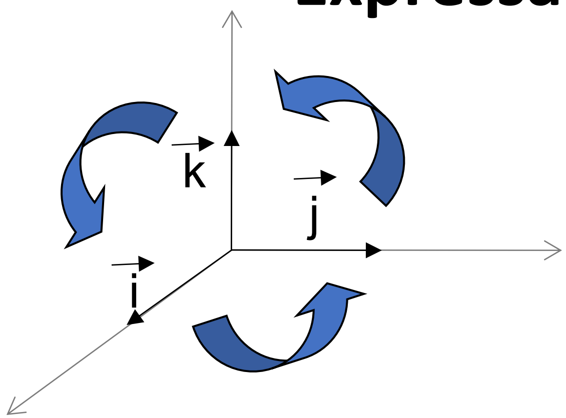
5) $m\vec{u} \times n\vec{v} = (m \cdot n) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

6) Distributiva:

6.1) a direita: $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$

6.2) a esquerda: $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$

Expressão Cartesiana do Produto Vetorial



$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}=-\vec{j}\times\vec{i}$$
$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}=-\vec{k}\times\vec{j}$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}=-\mathrm{i}\times\vec{k}$$

$$\begin{cases}\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}\\ \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}\\ \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}\end{cases}$$

Sejam $\vec{u}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ e $\vec{v}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$. Vamos determinar $\vec{u}\times\vec{v}$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\times\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)$$

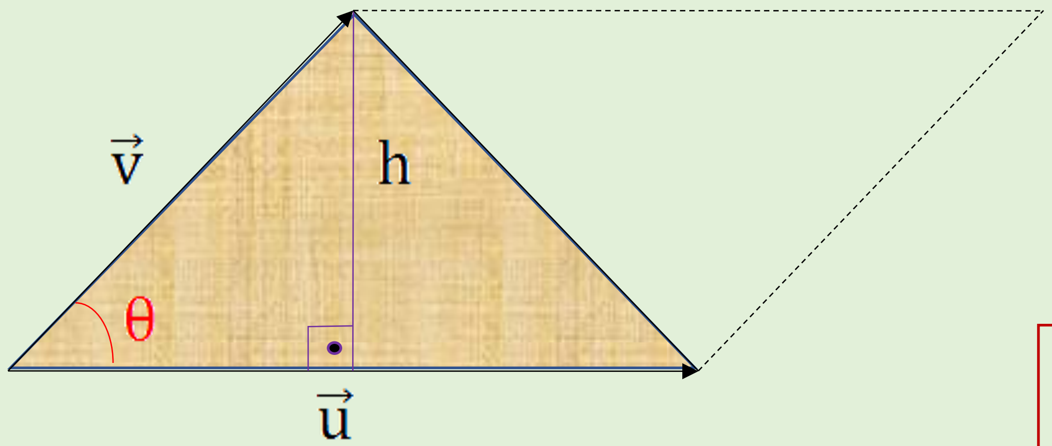
$$\vec{u}\times\vec{v}=x_1x_2(\overset{\vec{0}}{\vec{i}\times\vec{i}})+x_1y_2(\overset{\vec{k}}{\vec{i}\times\vec{j}})+x_1z_2(\overset{-\vec{j}}{\vec{i}\times\vec{k}})+$$
$$+y_1x_2(\overset{-\vec{k}}{\vec{j}\times\vec{i}})+y_1y_2(\overset{\vec{0}}{\vec{j}\times\vec{j}})+y_1z_2(\overset{\vec{i}}{\vec{j}\times\vec{k}})+$$
$$+z_1x_2(\overset{\vec{j}}{\vec{k}\times\vec{i}})+z_1y_2(\overset{-\vec{i}}{\vec{k}\times\vec{j}})+z_1z_2(\overset{\vec{0}}{\vec{k}\times\vec{k}})$$

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ x_1&y_1&z_1\\ x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}+(x_2z_1-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}}$$

Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Vetorial

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não paralelos.



Área do triângulo:

$$A_t = \frac{1}{2} A_p$$

$$\boxed{A_p = \frac{|\vec{u} \wedge \vec{v}|}{2}}$$

Área do paralelogramo:

$$A_p = b \cdot h \Rightarrow A_p = |\vec{u}||\vec{v}|\text{sen}\theta \Rightarrow \boxed{A_p = |\vec{u} \wedge \vec{v}|}$$

$$\begin{cases} b = |\vec{u}| \\ \text{sen}\theta = \dfrac{h}{|\vec{v}|} \Rightarrow h = |\vec{v}|\text{sen}\theta \end{cases}$$

PRODUTO MISTO

Definição: Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. O **produto misto** entre esses vetores é um **número real**, denotado e definido por:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle \quad \text{(I)}$$

Expressão Cartesiana do Produto Misto

1. Em relação à base canônica $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, sejam os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$. Prove que:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(II)}$$

PRODUTO MISTO

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle \quad \textbf{(I)}$$

Expressão Cartesiana do Produto Misto

1. Em relação à base canônica $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, sejam os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$. Prove que:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \textbf{(II)}$$

Desenvolvendo (I) por definição:

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (b_2c_3 - b_3c_2)\vec{i} + (a_3c_2 - a_2c_3)\vec{j} + (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + b_1a_3c_2 - b_1a_2c_3 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2 \quad \textbf{(I)}$$

Desenvolvendo (II):

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - b_1a_2c_3$$

Logo, (I) = (II) **c.q.d.**

PRODUTO MISTO

Pergunta: pode ser:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle \text{ ?}$$

Ou seja: $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle$

Propriedades do Produto Misto

1) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, se um deles é o vetor nulo ou são coplanares

2) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = \cdots$

3) $[m\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = m[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

4) $[\vec{u} + \vec{a}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}]$

Lembrando que:

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}$$

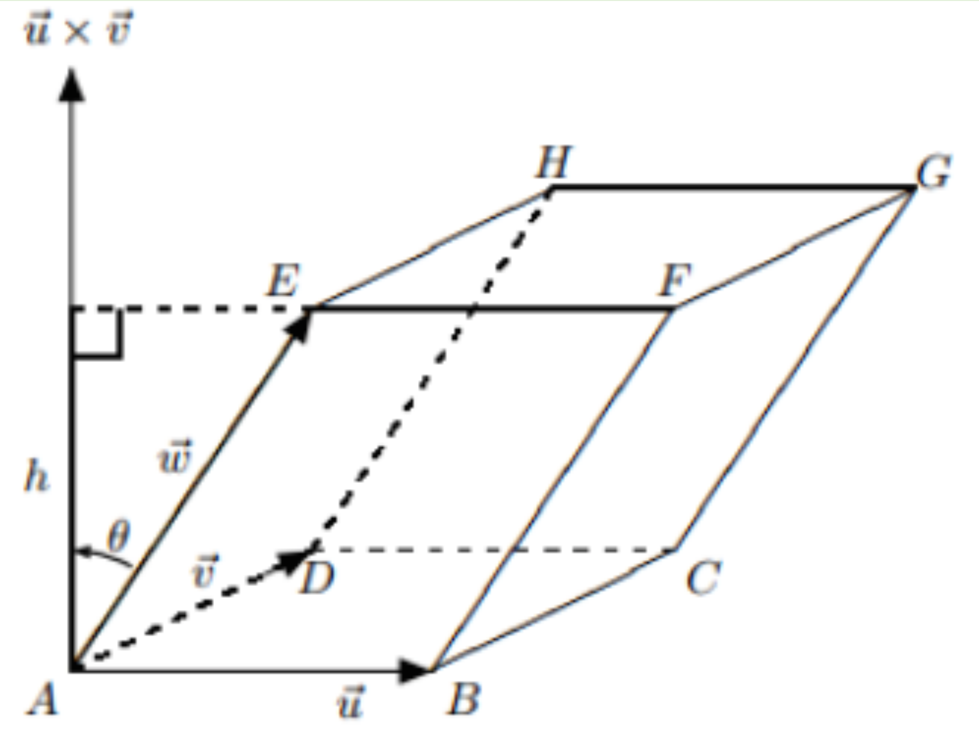
é a **condição de coplanaridade** entre 3 vetores. Logo:

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Longrightarrow$ Vetores coplanares (LD)

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0 \Longrightarrow$ Vetores não coplanares (LI)

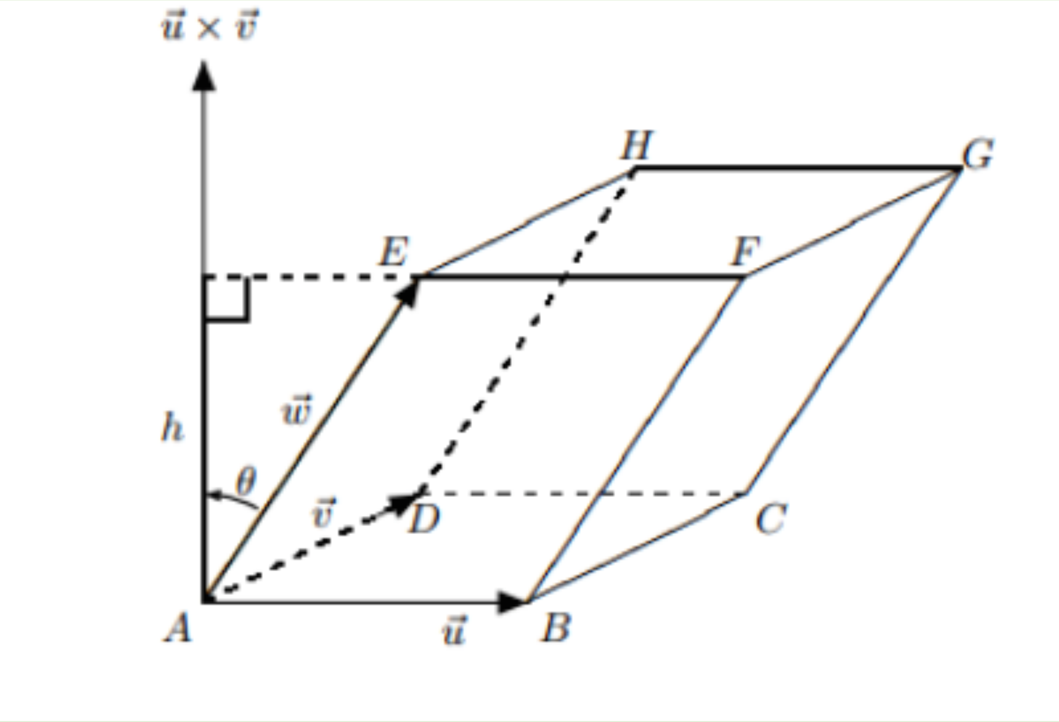
Interpretação geométrica do PRODUTO MISTO

2. Seja o paralelepípedo ABCDEFGH determinado pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ conforme figura abaixo.

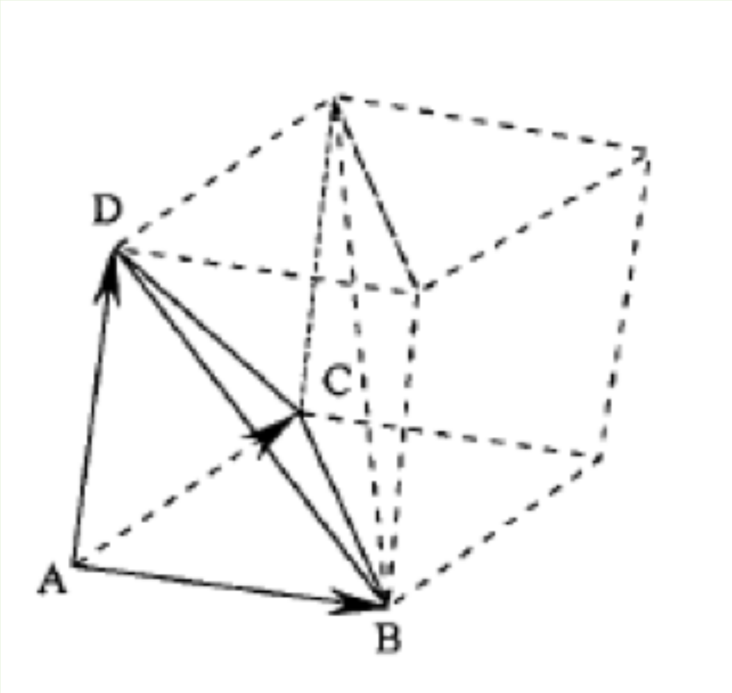


Interpretação geométrica do PRODUTO MISTO

a) Determine a área da base ABCD desse paralelepípedo em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
b) Determine a altura h em função de $\vec{w}$.
c) Determine o volume do paralelepípedo em função de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
d) O que você pode concluir?
e) O produto misto de três vetores pode ser negativo (ou seja, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] < 0$)? Discuta e interprete geometricamente.

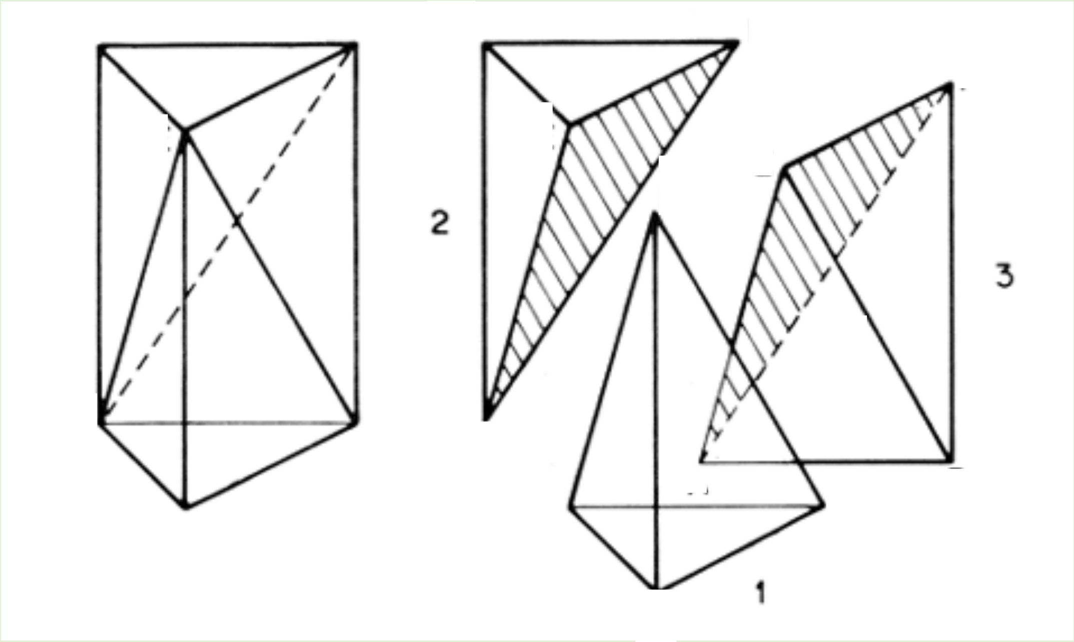


Volume do Tetraedro



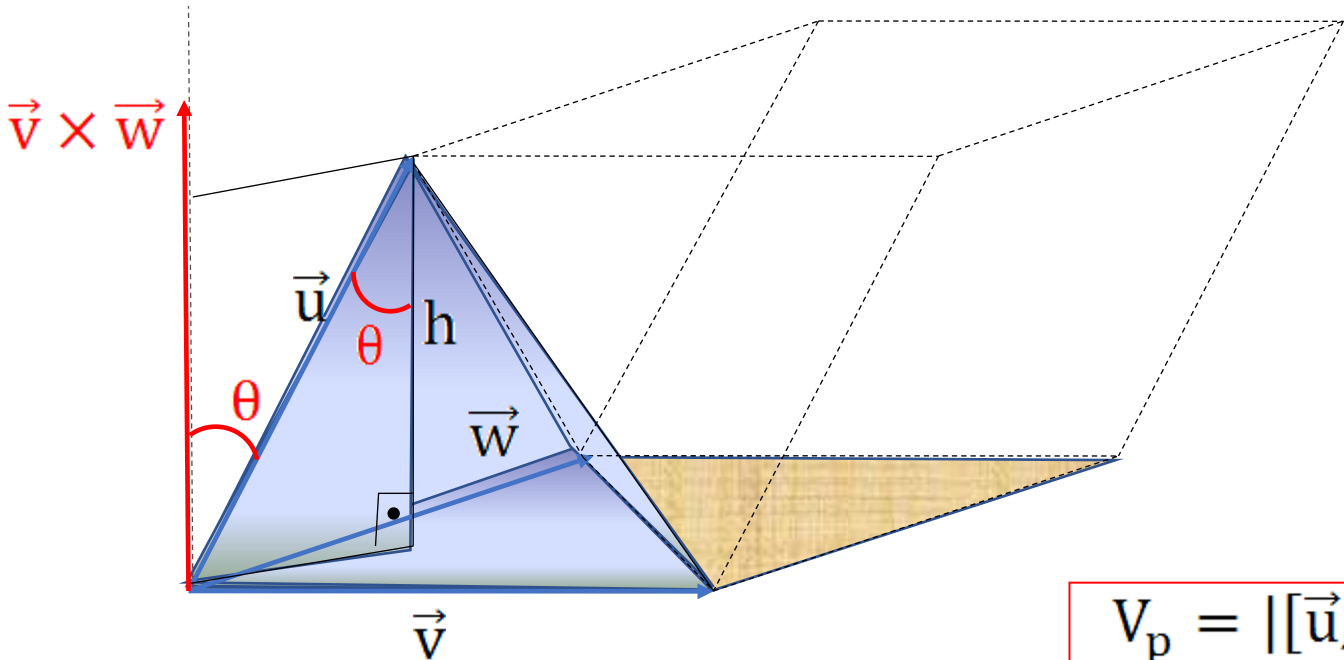
Um paralelepípedo pode ser dividido em
2 prismas triangulares de mesmo tamanho.

E um prisma triangular pode ser dividido em
3 tetraedros de mesmo volume, sendo um
Deles o tetraedro ABCD.



Interpretação Geométrica do Produto Misto

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores não coplanares.



$$V_p = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

Volume do paralelepípedo (V_p): $V_p = Ab \cdot h$

$$Ab = |\vec{v} \times \vec{w}|$$

$$V_t = \frac{1}{6} V_p$$

$$\cos\theta = \frac{h}{|\vec{u}|} \Longrightarrow h = |\vec{u}|\cos\theta$$

$$V_t = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|}{6}$$

$$V_p = |\vec{u}||\vec{v} \times \vec{w}|\cos\theta = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Exercício

Três vértices de um tetraedro de volume *6 u*.v. são:
A=(-2, 4, 1), *B*=(-3, 2,3) e *C*=(1,-2,1).

a) Determine o quarto vértice *D* sabendo que ele pertence ao eixo *OY*.

b) Determine o menor ângulo entre a aresta $\overline{BC}$ e a mediana relativa ao vértice *A* da face *ACD*.

c) Faça um esboço gráfico da situação.

Aplicações do produto vetorial e misto:

1) Distância de ponto a reta (questão da P1)
2) Distância de ponto a plano