PROVA 2 – GEOMETRIA ANALÍTICA

Nome:____ **Nº USP:**____________ **Data: 21/07/2020**

Atenção:

- Responda todas as questões de maneira prolixa, explicando todos os seus passos.

Questão 1 - (2,5 pt) Faça o estudo da posição relativa entre as retas e encontre a distância relativa entre elas.

$$r: \begin{cases} y = 2 \\ z = 3x \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} y = -3x + 2 \\ z = 3x - 1 \end{cases}$$

Questão 2. (2,5 pt) Encontre um novo sistema de coordenadas de modo a eliminar o termo misto da equação:

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy - 30 = 0$$

Identifique o lugar geométrico representado por essa equação.

Questão 3 - (2,5 pt) Prove que $(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$. (Identifique as propriedades utilizadas em todos os passos)

Questão 4 - (2,5 pt) Identifique o lugar geométrico da equação $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 4z^2 - 8z + 2 = 0$ e encontre a sua interseção com a reta

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Boa Prova!!!

Questão

$$r: \begin{cases} y = 2 \\ z = 3x \end{cases} \qquad s: \begin{cases} y = -3x + 2 \\ z = 3x - 1 \end{cases}$$

reta r:

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = \dfrac{z-0}{3} \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{aligned} &A(0,2,0) \\ &\vec{v}_r = (1,0,3) \end{aligned}$$

$\hookrightarrow \dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-0}{3}$

reta s:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{3} \quad \therefore \quad \begin{aligned} &B(0,2,-1) \\ &\vec{v}_s = (1,-3,3) \end{aligned}$$

Posição relativa

. São retas paralelas?

→ condição de paralelismo: $\vec{u} = \lambda \vec{v}$

$$\frac{1}{1} \neq \frac{0}{-3} \neq \frac{3}{3} \quad \therefore \text{ não são paralelas}$$

. São coplanares?

→ condição de coplanaridade: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

$$(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{AB}) = 0$$

$\vec{AB} = B - A = (0,0,-1)$ ou $\vec{BA} = A - B = (0,0,1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3) = \underline{3} \qquad \text{ou} \qquad \underline{-3}$$

$$\therefore \quad 3 \neq 0$$

Logo, não são retas coplanares.

<u>Então, r e s são retas reversas.</u>

Distância entre retas reversas:

$$d(r,s) = \frac{|(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{P_1P_2})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

- $|(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{P_1P_2})| = |(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{AB})| = |3| = \underline{3}$

- $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{v_r} \times \vec{v_s}\| =$

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (0+9)\vec{i} - (3-3)\vec{j} + (-3+0)\vec{k}$$

$$= 9\vec{i} + 0\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\|\vec{v_r} \times \vec{v_s}\| = \sqrt{9^2 + 0^2 + (-3)^2}$$

$$= \underline{\sqrt{90}} = 3\sqrt{10}$$

$$d = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ u.c.}$$

$$\therefore \quad d(r,s) = \frac{3}{\sqrt{90}} \text{ u.c.}$$

$$d = \underline{0{,}316 \text{ u.c}}$$

A distância entre as retas r e s é $\frac{1}{\sqrt{10}}$ u.c.

Questão 2:

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy - 30 = 0$$

Devemos considerar uma rotação por um ângulo α, tal que:

$$\cot g\, 2\alpha = \frac{A - B}{C}$$

$$\cot g\, 2\alpha = \frac{6 - 9}{-4} = \frac{3}{4}$$

Como há solução, a equação no sistema de coordenada $x'y'$ será:

$$A' x'^2 + B' y'^2 - 30 = 0$$

Para determinar A' e B', temos:

$$\begin{cases} A' + B' = A + B \\ A' - B' = \dfrac{C}{\operatorname{sen} 2\alpha} \end{cases}$$

$$A' + B' = 6 + 9 = 15$$

$$A' - B' = \frac{-4}{\sqrt{\dfrac{1}{1 + (3/4)^2}}} = -5.$$

$$A' + B' = 15$$

$$A' - B' = -5$$

$$\therefore \quad \underline{A' = 5} \qquad \underline{B' = 10}$$

Logo, a equação no novo sistema coordenado $x'y'$ é:

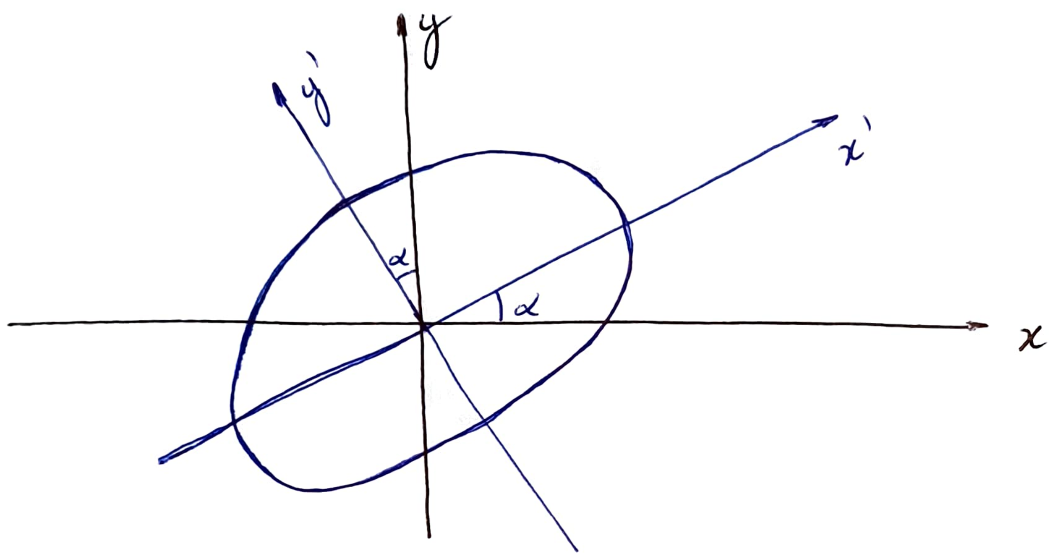
$$(5x')^2 + (10y')^2 - 30 = 0$$

$$(5x')^2 + (10y')^2 - 30 = 0$$

$$\frac{(5x')^2}{30} + \frac{(10y')^2}{30} = \frac{30}{30}$$

$$\frac{(x')^2}{6} + \frac{(y')^2}{3} = 1$$

Em relação a $x'y'$ é uma elipse com eixo maior sobre o eixo do x'



Questão 3:

$$(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}$$

Utilizando a propriedade III (distributiva em relação a soma de vetores), temos:

$$(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a}) = \left[(\vec{b}-\vec{a})\times\vec{c}\right] + \left[(\vec{b}-\vec{a})\times(-\vec{a})\right] =$$

Novamente, utilizando a propriedade III do produto vetorial, temos:

$$= \vec{b}\times\vec{c} + (-\vec{a}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(-\vec{a}) + (-\vec{a})\times(-\vec{a}) =$$

Utilizando a propriedade IV (multiplicação por um escalar), temos:

$$= \vec{b}\times\vec{c} - \vec{a}\times\vec{c} - \vec{b}\times\vec{a} + \vec{a}\times\vec{a} =$$

Utilizando a propriedade I (produto vetorial de dois vetores iguais), temos:

$$= \vec{b}\times\vec{c} - \vec{a}\times\vec{c} - \vec{b}\times\vec{a} + \vec{0} =$$

Utilizando a propriedade II, temos:

$$= \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b} =$$

Reagrupando, temos:

$$= \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}$$

$\therefore$

$$(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}$$

Questão 4:

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y + 4z^2 - 8z + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 2y + 1 - 1 + 4(z^2 - 2z) + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y - 1 + 4(z^2 - 2z + 1 - 1) + 0 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + 4(z-1)^2 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + 4(z-1)^2 = 4$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1$$

Após reduzir a equação a sua forma canônica (ou padrão), podemos identificar a equação como sendo uma elipsoide centrada em $C(1,1,1)$.

Para encontrar sua interseção com a reta $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, podemos igualar as equações:

$$\frac{(1-1)^2}{4} + \frac{(1-1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1$$

$$(z-1)^2 = 1$$

$$z = 2$$

$$z = 0$$

Portanto, os pontos de interseção são:

$$P_1(1,1,0) \text{ e } P_2(1,1,2).$$