MAP2110 - Notas de aula e exercícios

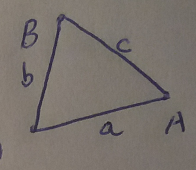
Planos em R^3

Saulo R. M. Barros

Departamento de Matemática Aplicada - IME-USP

A fórmula de Heron: A área de um triângulo com lados de comprimento a, b e c é dada por $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, onde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

Dem: Coloque um dos vértices na origem e os outros nos pontos A e B. (Assim $a = \|A\|$, $b = \|B\|$, $c = \|B-A\|$).



Temos que: $\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A.B)^2$

Lembre que $S = \dfrac{\|A \times B\|}{2}$. Temos ainda que

$$\|A - B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2A.B$$

Portanto: $4S^2 = a^2 b^2 - (A.B)^2$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2A.B$

Reescrevendo a segunda expressão: $4(A.B)^2 = (a^2+b^2-c^2)^2$

Combinando as expressões para eliminar os termos com $(A.B)^2$:

$$16S^2 = 4a^2b^2 - 4(A.B)^2 + 4(A.B)^2 - (a^2+b^2-c^2)^2$$

$$S^2 = \frac{a^2b^2}{4} - \frac{1}{16}(a^2+b^2-c^2)^2$$

$$S^2 = \frac{a^2b^2}{4} - \frac{1}{16}\left(a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4\right)$$

$$S^2 = \frac{1}{16}\left(4a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2\right)$$

$$S^2 = \frac{1}{16}\left(2ab - c^2 + a^2 + b^2\right)\left(2ab + c^2 - a^2 - b^2\right)$$

$$S^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)\left(c-(a-b)\right)\left(c+(a-b)\right)$$

$$S^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{c+b-a}{2} \; \frac{c+a-b}{2}$$

$$S^2 = s \cdot (s-c)(s-a)(s-b)$$

$$S = \sqrt{s(s-c)(s-a)(s-b)}$$

Planos e vetores Normais

Vimos que planos são expressos como $M = \{P + tA + sB\}$.
Um vetor N é perpendicular ao plano se é ortogonal a $L(\{A, B\})$, ou seja, $N \cdot A = N \cdot B = 0$. N (não nulo) é denominado um vetor normal ao plano. Segue que $N = A \times B$ é um vetor normal ao plano.

Como todo ponto do plano é da forma $X = P + tA + sB$,

então $(X - P) \cdot N = 0$.

Assim, todo ponto do plano obedece à equação acima.
Por outro lado, se $(X-P) \cdot N = 0$, vamos ver que $X \in M$.
Como A, B, N é base do $\mathbb{R}^3$, $X - P = \alpha A + \beta B + \gamma N$

$$e \quad (X-P) \cdot N = 0 \Rightarrow (\alpha A + \beta B + \gamma N) \cdot N = \gamma N \cdot N = 0$$

$$\therefore \gamma = 0 \quad e \quad X - P = \alpha A + \beta B$$

$$\rightarrow X = P + \alpha A + \beta B.$$

Concluimos então que $M = \{X : (X-P) \cdot N = 0\}$ é o plano passando por P ortogonal a N. (N pode ser tomado como $A \times B$).

Distância de um ponto Q ao plano M

A distância de um ponto Q ao plano M é definida como

$$d = \min_{X \in M} \|Q - X\|$$

Vamos ver como determinamos d.

Este resultado é análogo à determinação da distância de um ponto à reta.

Inicialmente consideremos $Q = O$ (a origem).

Temos que $d = \dfrac{|X \cdot N|}{\|N\|} = \dfrac{|P \cdot N|}{\|N\|}$

Note que todo ponto $X \in M$ é tal que:

$$|P \cdot N| = |X \cdot N| \leq \|X\| \|N\|$$

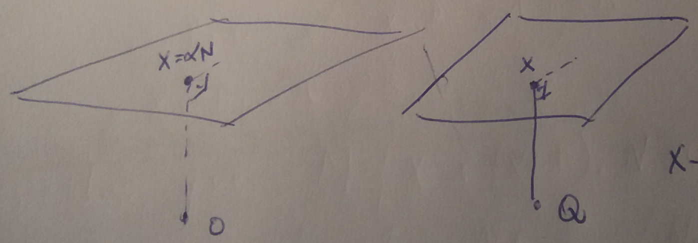
e portanto $\|X\| \geq d$.

Vale a igualdade somente se $X = \alpha N$

e como $X \cdot N = P \cdot N$, temos

que $\alpha = \dfrac{P \cdot N}{N \cdot N}$. Assim, o ponto do plano

mais próximo à origem é dado por $\left(\dfrac{P \cdot N}{N \cdot N}\right) N$



$$X - Q = \frac{(P-Q) \cdot N}{N \cdot N} N$$

$$\Big(\quad |(P-Q) \cdot N| = |(X-Q) \cdot N| \leq \|X-Q\| \|N\|$$

$$\therefore \|X-Q\| \geq \frac{|(P-Q) \cdot N|}{\|N\|} = d \quad \text{igualdade} \longleftrightarrow (X-Q) = \alpha N$$

$$\alpha N \cdot N = (X-Q) \cdot N = (P-Q) \cdot N$$

$$\therefore \alpha = \frac{(P-Q) \cdot N}{N \cdot N}$$

Equações cartesianas para planos

Se tivermos $N = (a, b, c)$ $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $X = (x, y, z)$

a equação do plano $(X - P) \cdot N = 0$ equivale a:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

ou ainda $ax + by + cz = d_1 = (ax_1 + by_1 + cz_1)$

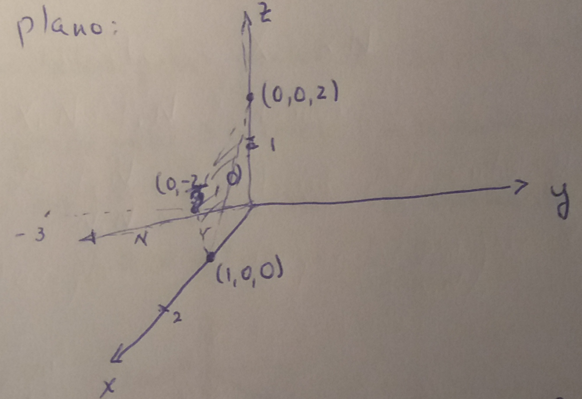
Ou seja, uma equação linear do tipo $ax+by+cz=d$ define a equação de um plano. O plano é composto por todo $X \in \mathbb{R}^3$, $X=(x,y,z)$ solução da equação acima.

Teremos um plano passando pela origem $\leftrightarrow d=0$.

Exemplos:

A equação $2x-3y+z=2$ representa um plano, normal ao vetor $N=(2,-3,1)$.

Podemos esboçar o plano:



Distancia do plano à origem: $\dfrac{|P.N|}{N.N} = \dfrac{2}{\|N\|^2} = \dfrac{2}{\sqrt{4+9+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{14}} \sim 0.534\ldots$

- Dois planos são paralelos caso possuam mesma direção Normal.

Assim. $ax+by+cz=d_1$ e $ax+by+cz=d_2$ são planos paralelos. A distância entre os dois planos é a diferença entre a distância deles à origem, e é dada por $|d_1-d_2|/\|N\| = \dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \min \|X-Y\|$,

onde $X \in M_1$, $Y \in M_2$.

- Dois planos são perpendiculares se as direções normais a eles forem ortogonais. $(N_1 \cdot N_2 = 0)$.

Exemplos: (13.17)

Exerc 8: Determine a equação do plano passando por $P=(2,3,-7)$ ortogonal à reta que passa por $(1,2,3)$ e $(2,4,12)$.

A direção da reta é dada por $N=(2,4,12)-(1,2,3)=(1,2,9)$

A equação do plano é $X.N=P.N$ que corresponde a:

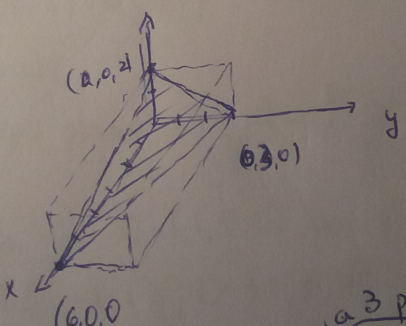
$$x+2y+9z = 2+6-63 = -55$$

Ex 12: Qual o volume do tetraedro cujos vértices são a origem e as intersecções do plano $x+2y+3z=6$ com os eixos $x, y, e\, z$.

As intersecções são dadas pelos pontos $A=(6,0,0)$, $B=(0,3,0)$ e $C=(0,0,2)$.

O Paralelepípedo gerado pelos 3 vetores (na verdade, um ~~par~~ "tijolo").

Tem volume $V = \det \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 36$. O volume do tetraedro é igual a $V/6 = 6$.



Ex. 16: Mostra que se as normais N_1, N_2 e N_3 a 3 planos forem L.I., os planos se interceptam em um único ponto.

Sejam $N_1=(n_{1,1}, n_{1,2}, n_{1,3})$, $N_2=(n_{2,1}, n_{2,2}, n_{2,3})$, $N_3=(n_{3,1}, n_{3,2}, n_{3,3})$

As equações dos planos são:

$$n_{11}x + n_{12}y + n_{13}z = d_1$$
$$n_{21}x + n_{22}y + n_{23}z = d_2$$
$$n_{31}x + n_{32}y + n_{33}z = d_3$$

$X=(x,y,z)$ pertence aos 3 planos se for solução do sistema, que tem solução única se as Normais forem L.I.

Quando forem L.D. pode haver intersecção vazia (dois planos distintos //s), uma reta (3 planos) ou 3 planos iguais.

Exerc 17 (13.17)

Encontre a reta passando por $P=(1,2,3)$ paralela aos planos

$x+2y+3z=4 \qquad 2x+3y+4z=5.$

Uma reta é paralela a um plano se for ortogonal à sua normal.

A direção da reta deve então satisfazer:

$d=(d_1,d_2,d_3)$, $(d_1,d_2,d_3).(1,2,3)=0$ e $(d_1,d_2,d_3).(2,3,4)=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &d_2=-2d_3 \\ &d_1+d_2+d_3= d_1-d_3=0 \\ &d_1=d_3. \end{aligned}$$

$R= (1,2,3)+t(1,-2,1)$

Exerc. 21: Sejam A,B,C determinando um plano. A distância a) de um ponto Q ao plano é?

Temos: $M=\{A+t(B-A)+s(C-A)\}$. Um vetor normal ao plano é $(B-A)\times(C-A)=N$

e a distância de Q ao plano é: $d=\dfrac{|(Q-A).N|}{\|N\|}=\dfrac{|(Q-A).(B-A)\times(C-A)|}{\|N\|}$

b) Determine a distância de $Q=(1,0,0)$ ao plano determinado por $A=(0,1,1)$, $B=(1,-1,1)$, $C=(2,3,4)$.

$$N=(B-A)\times(C-A)=(1,-2,0)\times(2,2,3)=\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}=(-6,-3,6)$$

$Q-A=(1,-1,-1)$

$(Q-A).N=(1,-1,-1).(-6,-3,6)=-6+3-6=-9$

$\|N\|=\sqrt{36+9+36}=\sqrt{81}=9 \qquad d=\dfrac{|(Q-A).N|}{\|N\|}=\dfrac{9}{9}=1$