

Polinômio de Taylor

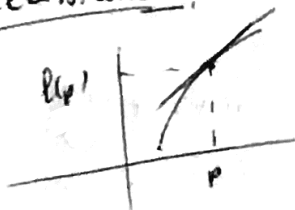
Problema: Calcular $\sin 1$, $\ln(1,3)$, e etc.

Ideia: - Fazer cálculos aproximados
- Não dá para saber o erro exato, mas é importante poder estimar o erro cometido.
Exemplo: Calcular e com erro, em módulo, $< 10^{-5}$.

• Polinômio de Taylor: são polinômios (logo fácil de calcular o valor em um ponto) que podem ser usados para fazer esses cálculos aproximados. Teremos também uma fórmula que ajudará a estimar o erro.

Ideia geral: aproximar a função localmente por um polinômio (isto perto de um ponto p), mas precise ser uma aproximação boa, ou seja, com erro "pequeno" (vai querer que o erro $\rightarrow 0$ "rápido").

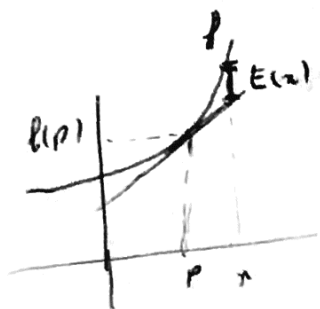
Lembrando:



A reta tangente ao gráfico no ponto $(p, f(p))$ é dada por: $y - f(p) = f'(p)(x - p)$

- Mas o que a reta tangente tem de especial?
Ela aproxima f perto de p e é a reta passando por $(p, f(p))$ que melhor faz isso.
Vamos justificar essa afirmação.

Suponha f uma função derivável em p .



A reta tangente ao gráfico de f em $(p, f(p))$

$$\begin{aligned} & \text{é:} \\ & y - f(p) = f'(p)(x - p) \\ \Rightarrow & y = \underbrace{f(p) + f'(p)(x - p)}_{T(x)} \end{aligned}$$

Seja $T(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$ ($\therefore$ o gráfico de T é a reta t_p)

Para $x \in D \cap I$, defina $E(x) = f(x) - T(x)$

(Logo $E(x)$ é o erro que cometemos quando aproximamos $f(x)$ por $T(x)$).

$$\therefore E(x) = f(x) - T(x) = f(x) - f(p) - f'(p)(x - p)$$

$$\text{Note que } \lim_{x \rightarrow p} \frac{E(x)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} \left[\underbrace{\frac{f(x) - f(p)}{x - p}}_{\rightarrow f'(p)} - f'(p) \right] = 0$$

Intuitivamente, o erro tende a zero "mais rápido" que $x - x_0$

Obs: Pode-se mostrar que a função $T(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$ é a única, passando por $(p, f(p))$, cujo gráfico é uma reta, com essa propriedade. Com isso, se f é derivável em p , $T(x)$ é a função polinomial de grau no máximo 1 que melhor aproxima f "perto de p ".

(Obs: $T(x) = f(p) + f'(p)(x-p) \Rightarrow \begin{cases} T(p) = f(p) \\ T'(p) = f'(p) \end{cases} \rightarrow \text{voltaremos a isso depois}$

• Isso justifica:

Def: O polinômio $P(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$ denomina-se polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de p .

• Problema: Como estimar o erro?
Usamos o seguinte teorema (que não mostrarei; usa o TVM).

Teorema: Seja f derivável até 2º ordem no intervalo I e sejam $x, p \in I$. Então existem pelo menos um c entre x e p ($c \neq x$ e $c \neq p$) tal que

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \underbrace{\frac{f''(c)(x-p)^2}{2}}_{E(x)}$$

Obs: c é obtido pelo TVM (aplicado em uma certa função auxiliar), não tem como achá-lo. Por isso não dá para calcular $E(x)$!

• Vamos fazer um exemplo para mostrar como podemos usar o teorema.

Exemplo: Vamos calcular um valor aproximado de $\ln(1,03)$ e avaliar o erro.

Seja $f(x) = \ln x$. Vamos tomar $p=1$.

Temos: $f'(x) = \frac{1}{x}$ $f(1) = \ln 1 = 0$ $f'(1) = 1$

Logo, o polinômio de Taylor de $f(x) = \ln x$, de ordem 1, em volta de $p=1$ é:

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) \quad \therefore \boxed{P(x) = x-1}$$

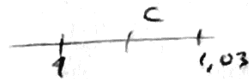
Logo $\ln(1,03) \approx P(1,03) = 0,03$

Avaliação do erro:

Pebo teorema, $E(x) = \frac{f''(c)}{2}(x-1)^2$, com c entre 1 e x (onde $E(x) = f(x) - P(x)$).

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Queremos estimar $E(x)$ para $x = 1,03 > 1$. Como c está entre 1 e x , se $x > 1$, então $c > 1$



Assim, para $x > 1$, teremos $c > 1$ e portanto

$$|E(x)| = \left| \frac{1}{2} f''(c)(x-1)^2 \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{c^2} \right| (x-1)^2 \leq \frac{1}{2} |x-1|^2$$

($c > 1 \Rightarrow \frac{1}{c^2} < 1$)

Logo para $x = 1,03$ temos:

$$|E(1,03)| \leq \frac{1}{2} |1,03 - 1|^2 = \frac{1}{2} (0,03)^2 = 0,00045 < 10^{-3}$$

$\therefore \ln(1,03) \approx 0,03$ com erro inferior a 10^{-3}

Obs: No exemplo anterior $E(x) = f(x) - T(x) < 0$ (pois $f''(c) < 0$)
e $\therefore E(x) = \frac{f''(c)}{2} (x-1)^2 < 0$.



$$\therefore f(x) < T(x)$$

Ou seja, a aproximação é por excesso.

- Pergunta: Como conseguir uma aproximação melhor?
grau 1 $\leadsto$ aproxime por reta
Pode tentar aproximar por parábola no grau 2!

• Polinômio de Taylor de grau 2:

- Suponha f com derivada até 2ª ordem em I (I um intervalo)
e $p \in I$.

• Antes tínhamos $P(x)$ com grau 1 tal que $\begin{cases} P(p) = f(p) \\ P'(p) = f'(p) \end{cases}$ e

$$\lim_{x \rightarrow p} E(x) = 0$$

- Queremos melhorar a aproximação usando um $P(x)$ de grau 2.

É razoável pedir que:

- $P(p) = f(p)$
- $P'(p) = f'(p)$ na mesma reta tangente
- $P''(p) = f''(p)$ $\leadsto$ "mesma concavidade perto de p "

Vamos procurar P satisfazendo essas condições. Para facilitar, podemos supor P da forma:

$$P(x) = A_0 + A_1(x-p) + A_2(x-p)^2$$

$$\text{Dai temos: } P'(x) = A_1 + 2A_2(x-p)$$

$$P''(x) = 2A_2$$

$$\text{Logo: } P(p) = f(p) \Rightarrow f(p) = A_0$$

$$P'(p) = f'(p) \Rightarrow f'(p) = A_1$$

$$P''(p) = f''(p) \Rightarrow f''(p) = 2A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} f''(p)$$

Obtemos assim:

$$P(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2$$

(comparar com a expressão do erro do teor. Peetre e diferença?)

f e P admitem a mesma reta tangente em $(p, f(p))$ e a mesma concavidade (se $f'(p) \neq 0$ e f'' contínuo) perto de p .

Logo é razoável esperar que perto de p , $P(x)$ aproxime f melhor do que o polinômio de Taylor de ordem 1. De fato, antes tínhamos $\lim_{x \rightarrow p} \frac{E_1(x)}{(x-p)} = 0$

Vamos mostrar que agora temos $\lim_{x \rightarrow p} \frac{E_2(x)}{(x-p)^2} = 0$

(onde $E_1 = f(x) - P_1(x)$ e $E_2(x) = f(x) - P(x)$)
 $\hookrightarrow$ Taylor de ordem 1

• Suponha $E(x) = f(x) - P(x)$

$$\therefore E(x) = f(x) - f(p) - f'(p)(x-p) - \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2$$

Então temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow p} \frac{E(x)}{(x-p)^2} &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p) - f'(p)(x-p) - \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2}{(x-p)^2} \quad \left[\frac{0}{0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{\underbrace{f'(x) - f'(p)}_{2(x-p)} - \frac{f''(p)}{2} \cdot 2(x-p)}{2(x-p)} = 0\end{aligned}$$

Intuitivamente, $E(x) \rightarrow 0$ "mais rápido" que $(x-p)^2$

(e p pol. de grau 2, $E(x) \rightarrow 0$ mais rápido do que tinha-
mos com grau 1)

Obs: $P(x)$ é o único polinômio de grau no máximo 2
com essa propriedade.

• Isso justifica:

Def: O polinômio $P(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2$ é

chamado de polinômio de Taylor de ordem 2 de f em
volta de p .

• Perto de p , em geral, o polinômio de Taylor de ordem 2
aproxima f melhor que o pol. de Taylor de ordem 1.

Exercício: Seja $f(x) = e^x$. Determine os polinômios de Taylor de ordem 1 e 2 de f em volta de $p=0$ e esboce os gráficos de f e dos polinômios.

Solução:

Vou só achar os polinômios, os gráficos ficam para vocês fazerem.

$$f(x) = e^x \quad \therefore f'(x) = f''(x) = e^x \quad p=0$$

$$\text{Logo } f(0) = f'(0) = f''(0) = e^0 = 1$$

Assim temos:

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x-0) \Rightarrow \boxed{P_1(x) = 1 + x}$$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 \Rightarrow \boxed{P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}}$$

Pergunta: Como estimar o erro?
Assim como antes, temos um teorema para ajudar:

Teorema: Sejam f derivável até 3ª ordem no intervalo I e $x, p \in I$. Então existe c entre x e p ($c \neq x$ e $c \neq p$) tal que

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2 + \underbrace{\frac{f'''(c)}{3!}(x-p)^3}_{E(x)}$$

Obs: Novamente, não sabemos c !

Exercício: Calcule um valor aproximado para $\ln(1,03)$ e avalie o erro, usando o polinômio de Taylor de ordem 2.

Solução:

$$p=1 \quad f(x) = \ln x \quad \therefore f'(x) = \frac{1}{x} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 \Rightarrow \boxed{P(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2}$$

$$\therefore \boxed{\ln(1,03) \approx P(1,03) = 0,02955}$$

Avaliação do erro

$$\text{Temos que } f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \therefore f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$\text{Logo } |f'''(x)| = \left| \frac{2}{x^3} \right| \leq 2 \quad \text{se } x \geq 1.$$

$$\text{Pelo teorema, } |f(x) - P(x)| = |E(x)| = \left| \frac{f'''(c)}{3!} (x-1)^3 \right|, \text{ para algum } c \text{ entre } x \text{ e } p=1.$$

$$\text{Para } x=1,03 \text{ e } p=1, \text{ temos } c > 1 \text{ (pois } 1 < c < 1,03)$$

$$\therefore |f'''(c)| \leq 2$$

$$\text{Logo } |E(x)| \leq \frac{|f'''(c)|}{3!} |x-1|^3 \stackrel{c>1}{\leq} \frac{2}{3!} |x-1|^3 = \frac{1}{3} |x-1|^3$$

$$\therefore |E(1,03)| \leq \frac{1}{3} (0,03)^3 = 9 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$$

$$\text{Temos então que } \ln(1,03) \approx 0,02955 \text{ com erro inferior a } 10^{-5}$$

Obs: Note que nesse caso $E(1,03) > 0$, logo a aproximação é por falta.

• Vamos agora para o caso geral:

• Polinômio de Taylor de Ordem n :

• Antes precisamos falar da derivada de ordem superior

f derivável $\leadsto f'$ função derivada

Se f' derivável, $(f')' = f''$ é a derivada de 2º ordem.

Se f'' derivável, podemos obter f''' etc.

Assim definimos:

f'' = derivada a segunda ou derivada de 2º ordem

f'''
 $f^{(4)}$
 $\vdots$

$f^{(n)}$ = n -ésima derivada de f ou derivada de ordem n

Sempre $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ (não tem como obter n -ésima derivada sem obter as anteriores).

• Suponha f derivável até ordem n no intervalo I e $p \in I$

Def: O polinômio de Taylor, de ordem n , de f em volta de p é o polinômio

$$P_n(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

Exercício: Achar os polinômios de Taylor de ordem 6 e 7 de $f(x) = \cos x$ em volta de $p=0$

Solução:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\sin x & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= -\cos x & f''(0) &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \sin x & f'''(0) &= 0 \\ f^{(4)}(x) &= \cos x & f^{(4)}(0) &= 1 \\ &\vdots & & \\ f^{(5)}(x) &= 0, & f^{(6)}(x) &= -1 \text{ e } f^{(7)}(x) = 0 \end{aligned}$$

Logo $P_6(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6$

Note que $P_7(x)$ é igual (mas na avaliação do erro será diferente)

• Para avaliar o erro usaremos:

Teorema (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange)

Seja f derivável até ordem $n+1$ no intervalo I e sejam $x, p \in I$. Então existe c entre x e p ($c \neq x$ e $c \neq p$) tal que:

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-p)^{n+1}, \text{ onde}$$

$$P(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2}(x-p)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

• Lembre que nunca sabemos c , ~~se~~ não dá para calcular o erro exato, só estimar!

Exercício:

(a) Mostre que $\forall x \in [0,1]$, $|e^x - (1+x+\frac{1}{2}x^2+\dots+\frac{1}{n!}x^n)| \leq \frac{3x^{n+1}}{(n+1)!}$

(b) Avalie e com erro, em módulo, inferior a 10^{-5} .

Solução:

$$f(x) = e^x \quad \therefore f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \quad \forall n$$

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n, \quad \text{então}$$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$\text{Logo } e \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

(a) Vamos avaliar o erro em função de n .

$$e^x = P_n(x) + E(x) \quad \therefore E(x) = e^x - P_n(x) = e^x - (1+x+\dots+\frac{1}{n!}x^n)$$

Mas sabemos que $f(x) - P_n(x) = E(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, para algum c entre x e p .

Como $f^{(n+1)}(c) = e^c \quad \forall n$, segue que $E(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, com c entre x e p .

Se $x \in [0,1]$, como c está entre 0 e 1, segue que

$$0 < c < x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad e^c < e < 3$$

$\therefore$ para $x \in [0,1]$ vale que $|E(x)| \leq \frac{3x^{n+1}}{(n+1)!}$

(b) Fazendo $x=1$, segue que $|E(1)| \leq \frac{3}{(n+1)!} \cdot 1 = \frac{3}{(n+1)!}$

Precisa achar n tal que $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$. Por tentativas, temos que $n=8$ serve ($\frac{3}{9!} < 10^{-5}$)

$$\therefore e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{8!} \quad \text{com erro} < 10^{-5}$$

$$\text{Obs: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{(n+1)!} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

↳ série: Cálculo 4.