Introdução às placas de Kirchhoff

Prof. Alfredo Gay Neto
Prof. Miguel Bucalem

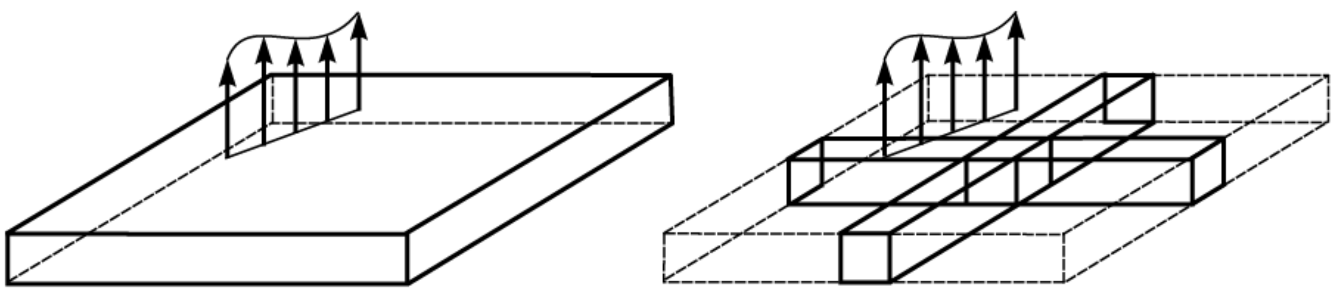
PEFUSP
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E GEOTÉCNICA

PEF 5762

Comportamento

O modelo estudado é caracterizado geometricamente como uma placa delgada e com um carregamento atuando transversalmente à superfície média dessa placa.

A flexão de uma placa que resiste à carga transversal pode ser interpetrada de forma simplificada por meio de barras que se dispõem ortogonalmente uma à outra.



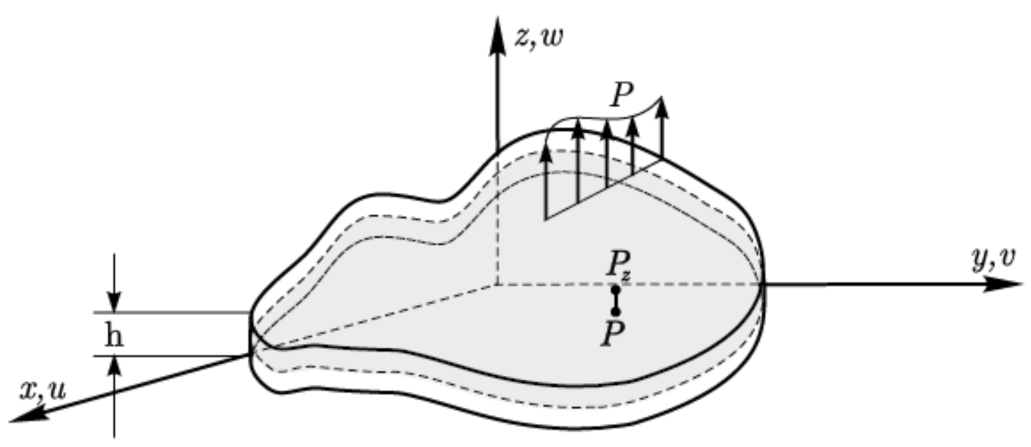
Modelo de Placa de Kirchhoff

PEFUSP

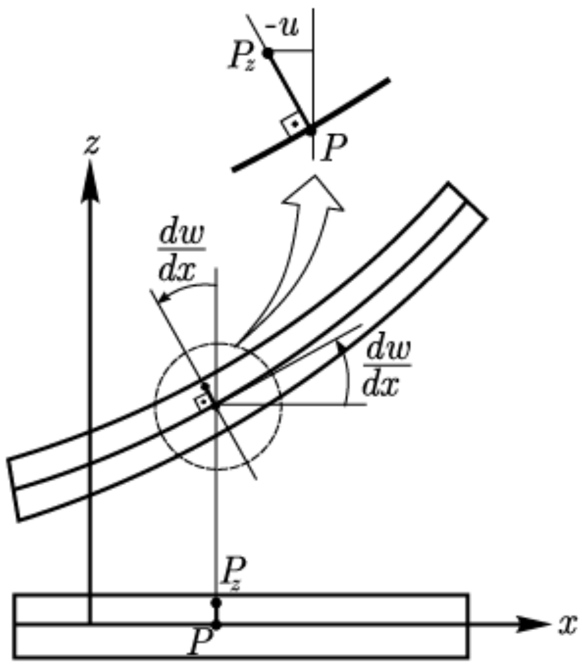
Cinemática:

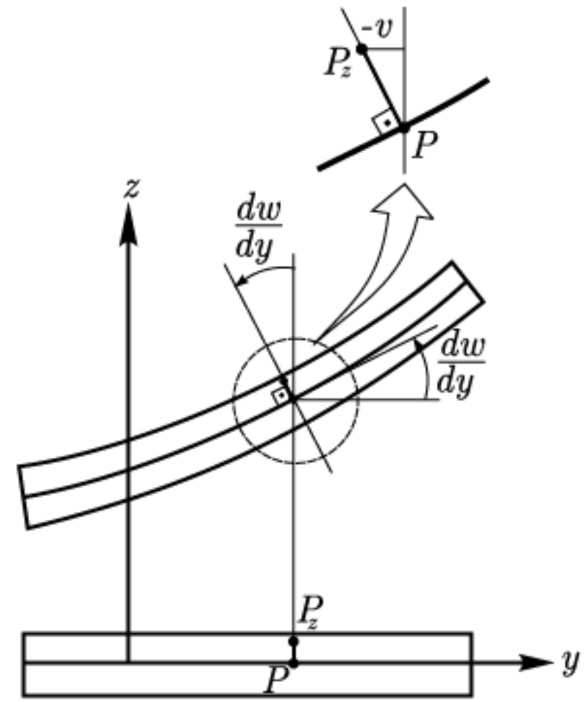
- Fibras retilíneas inicialmente ortogonais à superfície média da placa permanecem retilíneas e ortogonais à superfície média após a deformação;
- Os deslocamentos na direção transversal não variam ao longo da espessura da placa.

Considere a placa genérica da figura seguinte onde *P* é um ponto da superfície média de coordenadas *(x,y,0)*, e P_z é um ponto que se encontra numa fibra retilínea que é ortogonal à superfície média e passa por *P*, de coordenadas *(x,y,z)*. Considere um carregamento *q(x,y)* atuando transversalmente à placa. A espessura *h* é pequena quando comparada a uma dimensão característica no plano da placa.



Nas figuras abaixo, tem-se as representações das configurações deformadas e indeformadas da placa nos planos *xz* e *yz*, respectivamente:





$$w = w(x, y)$$
$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y}$$

Usando as relações de compatibilidade:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

sendo as outras componentes nulas.

Equação constitutiva

- A teoria assume que a placa é composta por uma "pilha" de lâminas;
- Cada lâmina está sujeita ao estado plano de tensão.

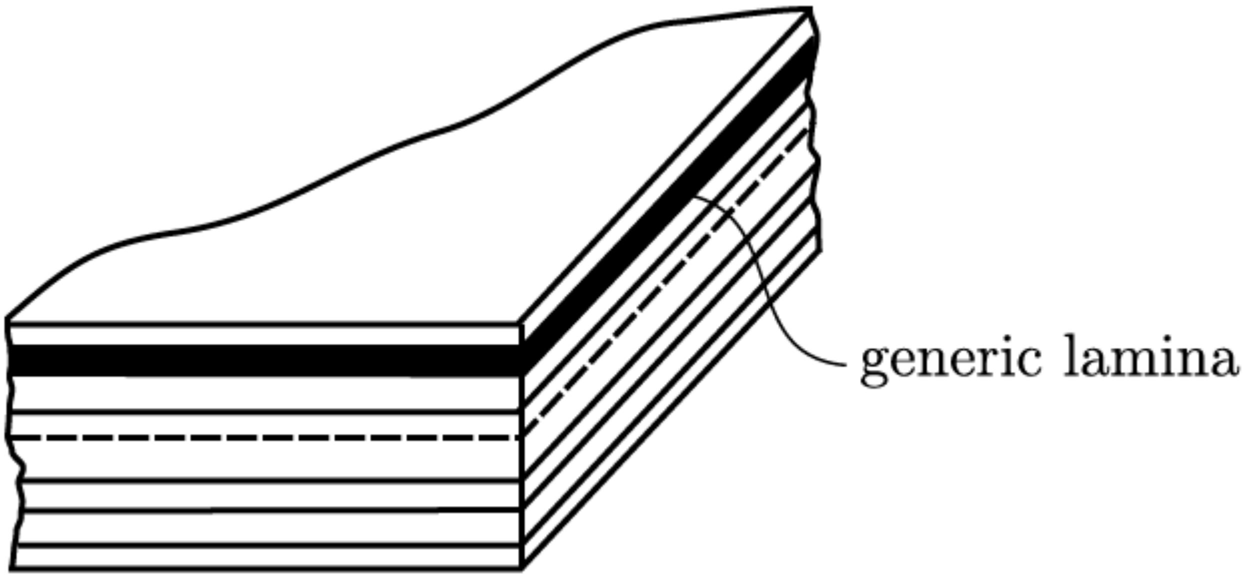
Portanto:

$$\tau_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\tau_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)$$

Placa idealizada como uma “pilha” de lâminas



Podem-se definir resultantes, por unidade de comprimento, da superfície média da placa. A resultante de momento M_x associada à componente τ_{xx}:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xx}(-z)dz$$

$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

Definindo *D:*

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Tem-se*:*

$$M_x = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

Esforços Solicitantes

$$M_x = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yy}(-z)dz$$

$$M_y = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx}(+z)dz = -D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}(-z)dz = +D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$