

Lista 4; exercício 2

2. As variáveis aleatórias X e Y são independentes; $1 - P(X = 0) = P(X = 1) = 1/3$ e Y tem distribuição Uniforme no intervalo $[0, 2]$. Calcule a função da distribuição acumulada das variáveis aleatórias $W = XY$ e $Z = X + Y$.

$$X \sim \text{Bernoulli}(p) \quad \text{com } p = \frac{1}{3}$$

$$Y \sim U(0, 2)$$

$$W = XY \quad \text{e} \quad Z = X + Y$$

$$F_W(x) = P(W \leq x) = P(XY \leq x)$$

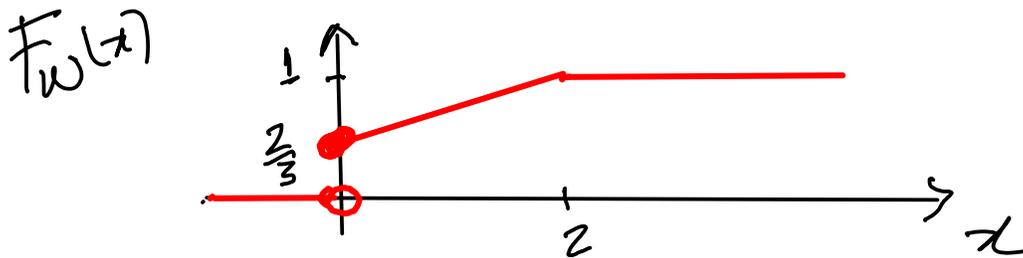
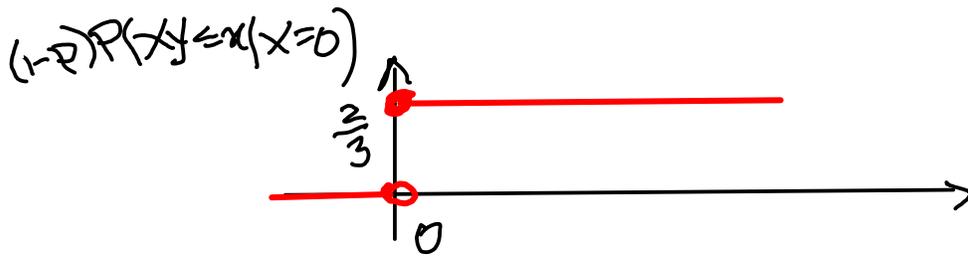
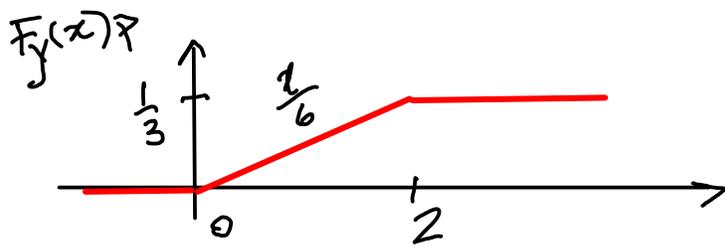
evento $\{XY \leq x\} = \{XY \leq x, X=1\} \cup \{XY \leq x, X=0\}$

disjuntos

$$\therefore F_W(x) = P(XY \leq x | X=1)p + P(XY \leq x | X=0)(1-p)$$

$$P(XY \leq x | X=1) = P(Y \leq x | X=1) \stackrel{\text{X e Y indep.}}{=} P(Y \leq x) = F_Y(x)$$

$$P(XY \leq x | X=0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



$$\frac{x}{b} + \frac{2}{3} = \frac{x+4}{6} \quad \text{de } 0 \leq x \leq 2$$

Obs: W é uma variável aleatória que não tem nem distribuição discreta nem contínua. Podemos imaginar que W resulta do seguinte jogo: lanço uma moeda (X) com $p = 1/3$ de sair cara; se sair cara, ganho Y reais, $Y \sim U(0,2)$; se sair coroa, não ganho nada. W tem função densidade de probabilidade?

Agora para $Z = X + Y$ (veja que este Z não tem relação com a Normal Padrão)

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(X+Y \leq x)$$

$$= P(X+Y \leq x | X=1)p + P(X+Y \leq x | X=0)(1-p)$$

$$P(X+Y \leq x | X=1) = P(1+Y \leq x | X=1) = P(Y \leq x-1)$$

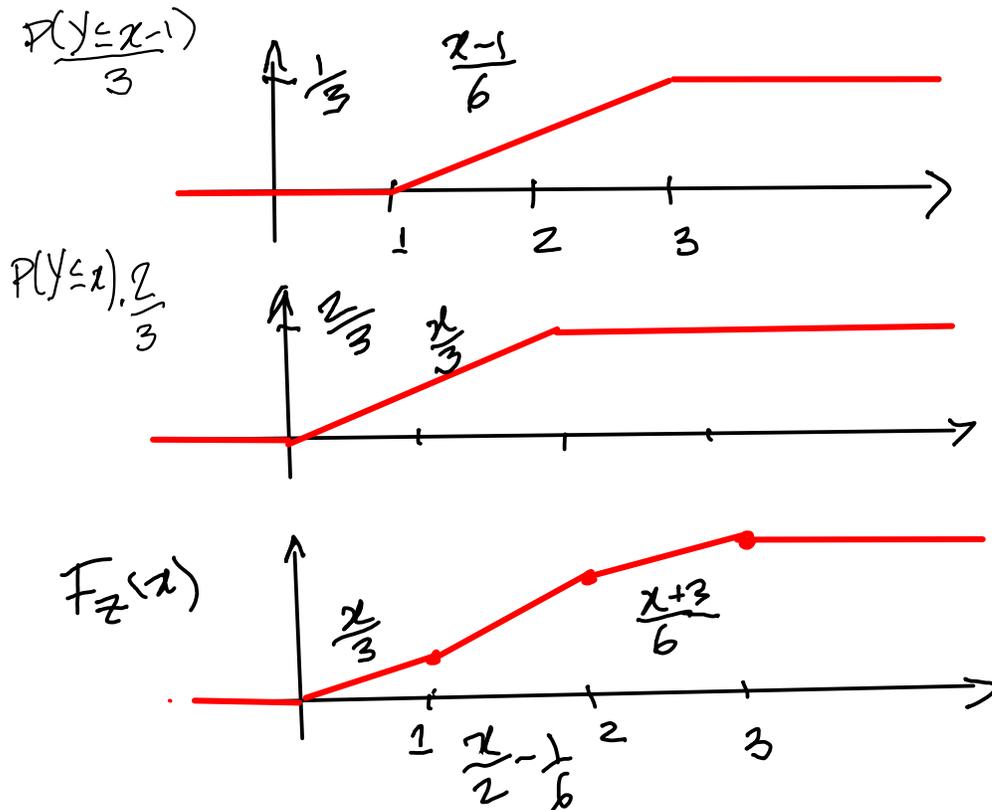
\Rightarrow

indep.

$$F_Y(x-1)$$

$$P(X+Y \leq x | X=0) = P(Y \leq x | X=0) = P(Y \leq x) = F_Y(x)$$

$$\therefore F_Z(x) = \frac{P(Y \leq x-1)}{3} + P(Y \leq x) \cdot \frac{2}{3}$$



Obs: Note que $X+Y$ tem distribuição contínua.
Qual é sua função densidade de probabilidade?