

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

**Gabarito da Avaliação de SEL0364 -Controle não Linear  
Aplicado**

**São Carlos**

**2020**

## Sumário

<b>1</b>	<b>Exercício 1</b>	<b>2</b>
1.1	Item (i)	3
1.2	Item (ii)	3
1.3	Item (iii)	4
1.4	Item (iv)	5
<b>2</b>	<b>Exercício 2</b>	<b>7</b>
2.1	Item (i)	8
2.2	Item (ii)	8
2.3	Item (iii)	9
2.3.1	Primeiro método de Lyapunov	9
2.3.2	Extensão de La Salle	9
<b>3</b>	<b>Exercício 3</b>	<b>12</b>
3.1	Item (i)	12
3.2	Item (ii)	16
3.3	Item (iii)	17
	<b>Referências</b>	<b>19</b>

## 1 Exercício 1

O exercício 1 trata do problema da estabilidade dos pontos de equilíbrio em um pêndulo simples. O valor da questão é de 5 pontos e a distribuição de pontos foi feita como se segue:

**Item (i)** (Total = 1,5 pts):

- Obter forma de espaço de estado - 0,75 pts
- Obter pontos de equilíbrio - 0,50 pts
- Verificar que há infinitos pontos de equilíbrio - 0,25 pts

**Item (ii)** (Total = 1 pt):

- Investigar estabilidade da origem - 0,50 pts
- Investigar estabilidade do ponto  $(\pi, 0)$  - 0,50 pts

**Item (iii)** (Total = 1,5 pts):

- Investigar a estabilidade da origem pelo segundo método de Lyapunov - 0,75 pts
- Investigar a estabilidade assintótica pelo princípio de invariância de La Salle (Total = 0,75 pts):
  - Estabelecer uma região limitada - 0,25 pts
  - Obter o conjunto invariante (E) - 0,25 pts
  - Verificar a estabilidade assintótica - 0,25 pts

**Item (iv)** (Total = 1,0 pts):

- Encontrar a derivada da função de Lyapunov - 0,75 pts
- Concluir sobre a estabilidade utilizando esse método - 0,25 pts

RESOLUÇÃO:

## 1.1 Item (i)

Para  $u = 0$ , a equação dinâmica do pêndulo pode ser reescrita como:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) - \frac{b}{ml^2} \dot{\theta} \quad (1.1)$$

Denotando  $x_1 = \theta$  e  $x_2 = \dot{\theta}$ , pode se obter uma nova equação, dada por 1.2, substituindo  $\theta$  e  $\dot{\theta}$  em 1.1;

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{b}{ml^2} x_2 \quad (1.2)$$

Como  $x_2 = \dot{x}_1$ , então a equação 1.2 pode ser demonstrado na forma de espaço de estado vetorial, como pode ser visto em 1.3:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{b}{ml^2} x_2 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Substituindo os valores de  $g, m, b$  e  $l$  em 1.3, tem-se a equação vetorial dada por 1.4:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -49 \sin(x_1) - 3.75x_2 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Seja  $f(x) = \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix}'$ , os pontos de equilíbrio  $x_{eq}$  são obtidos quando  $f(x_{eq}) = 0$ . Ou seja,  $\dot{x} = 0$ .

Para encontrar os pontos de equilíbrio do sistema 1.4, tem-se as relações a seguir:

$$\begin{bmatrix} x_{2eq} \\ -49 \sin(x_{1eq}) - 3.75x_{2eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} X_{2eq} = 0, & (a) \\ -49 \sin(x_{1eq}) - 3.75x_{2eq} = 0 & (b) \end{cases} \quad (1.5)$$

Substituindo (a) em (b), é possível verificar que  $-49 \sin(x_{1eq}) = 0 = \sin(x_{1eq}) = 0 \iff x_{1eq} = n\pi$  para  $n \in \mathbb{Z}$ . Dois pontos de equilíbrio que podem ser obtidos são a origem  $(0, 0)$  para  $n = 0$  e o ponto  $(\pi, 0)$  para  $n = 1$ .

Uma vez que o número de voltas  $n$  pode ser infinito e pertencente ao conjunto dos números inteiros, o ponto  $x_{1eq}$  pode assumir infinitos valores. Sendo assim. os pontos de equilíbrio têm o formato  $x_{eq} = (n\pi, 0), n \in \mathbb{Z}$ .

## 1.2 Item (ii)

O primeiro método de Lyapunov investiga a estabilidade do sistema linearizado em torno do ponto de equilíbrio. Uma vez que os pontos são repetições em cada ciclo, pode se analisar os pontos em que  $n = 0$  e  $n = 1$ . Os demais pontos terão o mesmo resultado

em estabilidade, de modo que para  $n$  par, tem-se a estabilidade na origem e  $n$  ímpar equivalentes á estabilidade em torno do ponto  $(\pi, 0)$ .

O sistema linearizado pode ser descrito pelo modelo de espaço de estado linear visto em 1.6, e o portanto as matrizes  $A, B, C$  e  $D$  devem ser encontradas.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (1.6)$$

Para o pêndulo,  $y = \theta = x_1$ , então  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $D = 0$ . As matrizes  $A$  e  $B$  podem ser obtidas encontrando as matrizes jacobianas em função dos entradas e estados. Ou seja:

$$A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x_e, 0}, \quad B = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x_e, 0}$$

Assim, a matriz  $A$  pode ser calculada por:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -49 \cos x_{1eq} & -3,75 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

E a matriz  $B$ :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Denotando  $A_1$  como a matriz obtida para o  $(0, 0)$  e  $A_2$  a matriz para o ponto  $(\pi, 0)$ , então  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -49 & -3,75 \end{bmatrix}$  e  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 49 & -3,75 \end{bmatrix}$ .

Um ponto de equilíbrio é dito assintoticamente estável pelo primeiro método de Lyapunov se todos os autovalores da matriz dos estados ( $A$ ) tiverem parte real negativa e o ponto é instável se pelo menos um dos autovalores tiver parte real positiva.

Os autovalores de  $A_1$  são  $\lambda_{11} = -1,875 + j6,7442$  e  $\lambda_{12} = -1,875 - j6,7442$  e os autovalores de  $A_2$  são  $\lambda_{21} = 5,3718$  e  $\lambda_{22} = -9,1218$ . Como é possível verificar, os autovalores do sistema linearizado em torno da origem possuem parte real negativa, logo o ponto  $(0, 0)$  é assintoticamente estável. Entretanto, o sistema para o ponto  $(\pi, 0)$  possui um autovalor positivo ( $\lambda_{21}$ ), então esse ponto é instável.

### 1.3 Item (iii)

Usando a lyapunov candidata  $V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1)$ , deve se verificar a estabilidade da origem.

Primeiramente, é verificado que a função utilizada atende aos requisitos de uma função de Lyapunov, pois:

1.  $V(x) = 0 \iff x = 0$ ;
2.  $V(0, 0) = 0$ ;
3.  $V(x_1, x_2) > 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0$

A estabilidade da origem deve ser verificada por meio da derivada da função  $V(x)$ :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{g}{l} \sin x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 \\ &= \frac{g}{l} \sin x_1 x_2 + x_2 \left( -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{b}{ml^2} x_2 \right) \\ &= -\frac{b}{ml^2} x_2^2.\end{aligned}$$

Portanto, para a origem ser estável é preciso que  $\dot{V}(x) = -\frac{b}{ml^2} x_2^2 \leq 0$ . O que leva a  $x_2^2 \geq 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Logo a origem é estável. Por outro lado, é possível obter  $\dot{V}(x) = 0$  para pontos diferentes da origem, o que impossibilita garantir a estabilidade assintótica por esse método e, por esse motivo, a extensão de La Salle deve ser empregada.

Tem-se um conjunto  $\omega_l = \{x \in \mathbb{R} | V(x) < l \text{ e } \dot{V}(x) \leq 0\}$ , sendo  $l > 0$  e um conjunto domínio  $D = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < \pi\}$ . Os limites de  $D$  foram determinados para que as propriedades da função de Lyapunov sejam atendidas, uma vez  $V(\pi, 0) = 0$ , logo o ponto  $(\pi, 0)$  não pertence ao domínio pois  $V(x) = 0$  para  $x \neq 0$ .

O conjunto  $\omega_l$  pertence a uma região dentro do conjunto  $D$ , ou seja,  $\omega_l \subset D$ . O princípio de La Salle estabelece que se caso o maior conjunto invariante dentro de  $\omega_l$  seja a origem, então a  $(0, 0)$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Os conjuntos invariantes podem ser dados por  $E = \{x \in \omega_l | \dot{V}(x) = 0\}$ . Pelo princípio da invariância de La Salle, qualquer trajetória iniciando em  $\omega_l$  tende para o maior conjunto invariante em  $E$  e permanece nesse conjunto para  $t \rightarrow \infty$ . Como  $\dot{V}(x) = -\frac{b}{ml^2} x_2^2$ , então para  $\dot{V}(x) = 0, x_2 = 0$  e  $x_1 \in D$ . Mas, como  $x_2 = \dot{x}_1$ ,  $x_1$  é nulo quando  $x_2 = 0$ , então a origem é o maior conjunto invariante em  $E$ . Portanto o ponto  $(0, 0)$  é assintoticamente estável.

#### 1.4 Item (iv)

Para a função candidata  $V(x) = \frac{1}{2}(x_2 + x_1)^2 + 2\frac{g}{l}(1 - \cos x_1) + \frac{x_2^2}{2}$ , as propriedades da função Lyapunov são verificadas.

A derivada de  $V(x)$  deve ser calculada:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= (x_2 + x_1)\dot{x}_1 + 2\frac{g}{l}\sin x_1\dot{x}_1 + (x_2 + x_1)\dot{x}_2 + x_2\dot{x}_2 \\
&= \dot{x}_1 \left( x_2 + x_1 + 2\frac{g}{l}\sin x_1 \right) + \dot{x}_2(2x_2 + x_1) \\
&= x_2 \left( x_2 + x_1 + 2\frac{g}{l}\sin x_1 \right) + \left( -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{b}{ml^2}x_2 \right) (2x_2 + x_1) \\
&= x_2^2 \left( 1 - \frac{2b}{ml^2} \right) + x_1x_2 \left( 1 - \frac{b}{ml^2} \right) - \left( x_1\frac{g}{l}\sin x_1 \right) \\
&= -6.5x_2^2 - 2.75x_1x_2 - 49x_1\sin x_1
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Então deve ser verificado se  $-6.5x_2^2 - 2.75x_1x_2 - 49x_1\sin x_1 < 0$ , para  $x_1 \in D$ . Uma maneira de analisar essa equação inicia-se por completar quadrados e então analisar as raízes. Portanto, pode se reescrever 1.9 como:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= -6.5(x_2^2 + \frac{2.75}{6.5}x_1x_2) - 49x_1\sin x_1 \\
&= -6.5 \left( \left( x_2 + \frac{2.75}{2 * 6.5}x_1 \right)^2 - \left( \frac{2.75}{2 * 6.5}x_1 \right)^2 \right) - 49x_1\sin x_1 \\
&= -6.5 \left( \left( x_2 + \frac{2.75}{13}x_1 \right)^2 \right) - 6.5 \left( \left( \frac{2.75}{13}x_1 \right)^2 \right) - 49x_1\sin x_1
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Denotando  $\alpha = -6.5 \left( x_2 + \frac{2.75}{13}x_1 \right)^2$ ,  $\beta = -6.5 \left( \frac{2.75}{13}x_1 \right)^2$  e  $\gamma = -49x_1\sin x_1$ , pode se reescrever 1.10 como:

$$\dot{V}(x) = \alpha + \beta + \gamma$$

É facilmente verificado que  $\gamma \leq 0, \forall x_1 \in D$ . Tem-se que  $\beta \leq 0, \forall x_1 \in D$  por se tratar de um termo quadrático multiplicado por um coeficiente negativo. E  $\alpha \leq 0, \forall (x_1, x_2), x_1 \in D, x_2 \in \mathbb{R}$  pelo mesmo motivo observado em  $\beta$ . Tais condições poderiam garantir que  $V(x) \leq 0$ , o que não seria suficiente para garantir a estabilidade assintótica. Porém, é possível observar que  $\gamma = 0$  e  $\beta = 0$  se, e somente se,  $x_1 = 0$ , o que leva a  $\alpha = 0$  se, e somente se,  $x_2 = 0$ . Com isso, verifica que  $\dot{V}(x) = 0 \iff (x_1, x_2) = (0, 0)$ , caso contrário  $\dot{V}(x) < 0$ . Uma vez que uma função é definida negativa para um domínio justamente nas condições observadas para  $\dot{V}(x)$ , a origem é assintoticamente estável.

## 2 Exercício 2

O exercício 2 trata do problema da estabilidade dos pontos de equilíbrio em um sistema dado. O valor da questão é de 2.5 pontos e a distribuição de pontos foi feita como se segue:

**Item (i)** (Total = 0,75 pts):

- Obter os pontos de equilíbrio - 0,75 pts (0,25 pts por cada ponto de equilíbrio encontrado)

**Item (ii)** (Total = 0,50 pts):

- Plotar Plano de Fase - 0,50 pts

**Item (iii)** (Total = 1,25 pt):

- Transladar o sistema para o ponto de equilíbrio - 0,10 pts
- Investigar a estabilidade de um ponto de equilíbrio pelo segundo ou primeiro método de Lyapunov - 0,65 pts
- Investigar a estabilidade assintótica pelo princípio de invariância de La Salle (Total = 0,50 pts):
  - Estabelecer uma região limitada - 0,15 pts
  - Obter o conjunto invariante (E) - 0,15 pts
  - Verificar a estabilidade assintótica - 0,20 pts

**Observação:** No Item (iii), deve ser feita a análise do segundo método de Lyapunov com a extensão de La Salle. Caso somente o primeiro método foi empregado, a pontuação na questão será de 0,65 pontos.

### RESOLUÇÃO:

O sistema não linear pode ser descrito em sua forma de espaço de estado vetorial, em que  $\dot{x} = f(x)$ . A saber:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^3 \\ -x_2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

A função no formato descrito em 2.1 é dita autônoma, pois não depende explicitamente da variável  $t$ , que representa o tempo.

## 2.1 Item (i)

Os pontos de equilíbrio podem ser obtidos igualando 2.1 a 0 e obtendo os pontos em que  $f(x_e) = 0$ .

Para a função ser nula, as seguintes condições devem ser atendidas:

$$\begin{cases} x_{1e} - x_{1e}^3 = 0 & (a) \\ -x_{2e} = 0 & (b) \end{cases} \quad (2.2)$$

Como observado em 2.2 (b),  $x_{2e} = 0$ . A equação 2.2 (a) pode ser reescrita como  $x_{1e}(1 - x_{1e}^2) = 0$ . Então, para 2.2 (a) ser atendida, tem-se que  $x_{1e} = 0$  ou  $1 - x_{1e}^2 = 0$ , o que leva a  $x_{1e} \pm 1$ . Assim, os pontos de equilíbrio do sistema são  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ .

## 2.2 Item (ii)

O diagrama de fase pode ser visto na imagem 1 e foi gerado por meio da função `ppplane8` do Matlab.

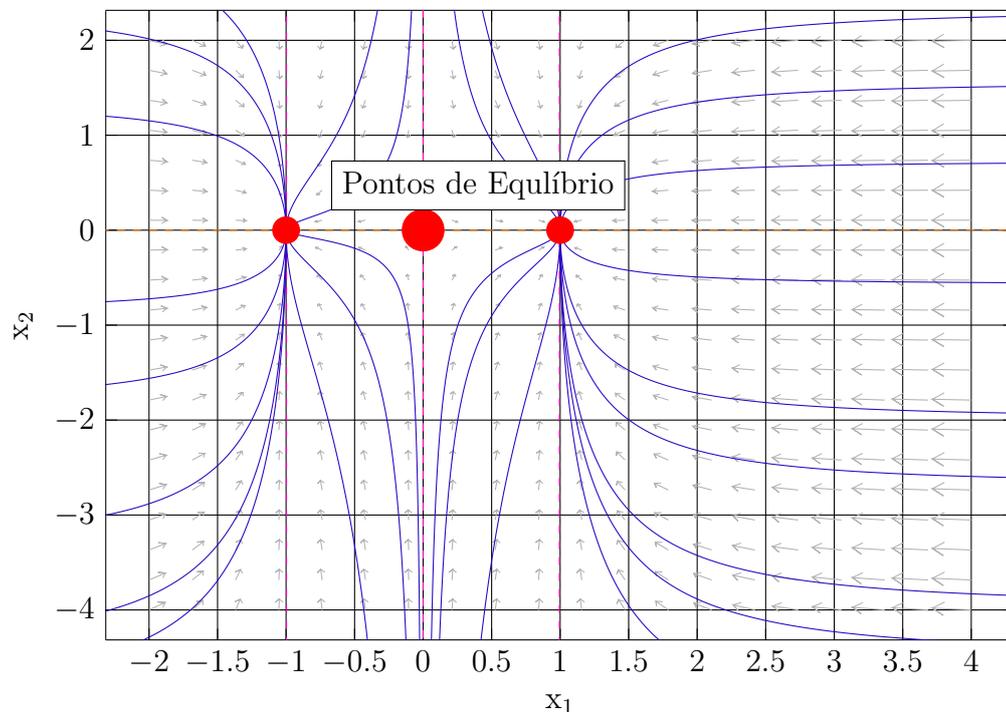


Figura 1 – Diagrama de Fase  
Fonte: Gerada pelo MATLAB.

Percebe-se que as curvas se afastam da origem, mostrando um comportamento de sela, e tendem para os demais pontos de equilíbrio quando  $t \rightarrow \infty$ . Pelo diagrama de fase,

os pontos de equilíbrio  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  são nós estáveis, enquanto a origem  $(0, 0)$  é um ponto de sela.

## 2.3 Item (iii)

### 2.3.1 Primeiro método de Lyapunov

Para se utilizar o primeiro método de Lyapunov, o sistema não linear deve assumir o formato:

$$\dot{x} = Ax$$

Em que a matriz  $A$  é formada pela linearização do sistema em torno dos pontos de equilíbrio. Em outras palavras,  $A$  pode ser obtida calculando-se a matriz jacobiana do sistema não linear para cada ponto de equilíbrio, de modo que:

$$A = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{array} \right]_{(x_e)} = \left[ \begin{array}{cc} 1 - 3x_1e^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right] \quad (2.3)$$

Para o ponto de equilíbrio  $(0, 0)$ , define-se a matriz jacobiana  $A_1$  que equivale a  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

Para o ponto  $(1, 0)$ , tem-se a matriz  $A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  e para o ponto  $(-1, 0)$  tem-se a matriz  $A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

De acordo com o critério de Lyapunov, para um ponto de equilíbrio ser assintoticamente estável, todos os autovalores da matriz  $A$  devem ser negativos, enquanto para ser instável, pelo menos um dos autovalores tem parte real positiva, enquanto os demais são não nulos. Os autovalores de  $A_1$  são  $\lambda_{11} = 1$  e  $\lambda_{12} = -1$ . Como há um autovalor positivo e outro nulo, a origem é instável. Tem-se os autovalores de  $A_2$  sendo  $\lambda_{21} = -2$  e  $\lambda_{22} = -1$  e os autovalores de  $A_3$  são  $\lambda_{31} = -2$  e  $\lambda_{32} = -1$ . Como todos os autovalores de  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$  possuem parte real negativa, esses são pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis.

### 2.3.2 Extensão de La Salle

Para utilizar o segundo método de Lyapunov com a extensão de La Salle, é preciso transladar o sistema para o ponto de equilíbrio analisado, já que a origem é instável. Podem ser analisados os pontos  $(-1, 0)$  ou  $(1, 0)$ . Nesse exemplo foi utilizado o ponto  $(1, 0)$ . A estabilidade do outro ponto pode ser encontrada de maneira análoga.

Definindo-se duas novas variáveis  $z_1, z_2$  de modo que  $z_1 = x_1 - 1$  e  $z_2 = x_2$ , tem-se as novas equações de estado:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_1 + 1 - (z_1 + 1)^3 \\ \dot{z}_2 &= -z_2\end{aligned}$$

Para o ponto de equilíbrio  $(1, 0)$ , tem-se uma função de Lyapunov  $V(x) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2)$ , com domínio  $D = \{z \in \mathbb{R} : z_1 \geq 0\}$  e a sua derivada:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= (z_1)\dot{z}_1 + z_2\dot{z}_2 \\ &= z_1((z_1 + 1) - (z_1 + 1)^3) + z_2(-z_2) \\ &= z_1(z_1 + 1)(1 - (z_1 + 1)^2) - z_2^2 \\ &= z_1(z_1 + 1)(1 - z_1^2 - 2z_1 - 1) - z_2^2 \\ &= -z_1^2(z_1 + 1)(z_1 + 2) - z_2^2\end{aligned}\tag{2.4}$$

Como pode ser observado em 2.4, para  $z_1 \in D$ ,  $\dot{V}(x) \leq 0$  e  $z_2$  pode assumir qualquer valor, pois é quadrático.

Tem-se um conjunto  $\omega_l = \{z \in \mathbb{R} : V(z) < l\}$ , em que  $l > 0$  e  $\dot{V}(z) \leq 0$ . Definindo-se  $l = 8$ , o conjunto  $\omega_l$  pode ser redefinido como:  $\omega_l = \{z_1, z_2 \in \mathbb{R} : 0 < z_1 < 4; |z_2| < \pm\sqrt{16 - (z_1)^2}\}$  e  $\omega_l \subset D$ .

Define-se um conjunto  $E = \{z \in \omega_l : \dot{V}(z) = 0\}$ .  $\dot{V}(z) = 0 \rightarrow z_2^2 = -z_1^2(z_1 + 1)(z_1 + 2)$ . Uma vez que  $z_2^2 \geq 0$ , então  $-z_1^2(z_1 + 1)(z_1 + 2) \geq 0$ . Mas foi observado anteriormente que  $-z_1^2(z_1 + 1)(z_1 + 2) \leq 0$  para todo  $z_1 \geq 0$ . Entretanto, para  $z_1 = 0$  obtém-se  $z_2^2 = 0$ , que é a única condições para que  $\dot{V}(z) = 0$ . Assim o conjunto  $E$  é um ponto, de forma que o valor de  $z_2$  é nulo se, e somente se,  $(z_1, z_2) = (0, 0)$ .

Em um conjunto invariante, qualquer trajetória iniciada dentro do conjunto deve permanecer no conjunto para todo  $t \geq 0$ . A única trajetória de  $z_1, z_2$  que permanece invariante é a origem. Logo, como a origem translada é assintoticamente estável, o ponto de equilíbrio  $(1, 0)$  é assintoticamente estável.

Os resultados gráficos podem ser vistos nas figuras a seguir. A Figura 2 contém o conjunto  $\omega_l$  e o conjunto  $E$ . É possível notar que o maior conjunto invariante em  $E$  é o ponto  $(1, 0)$  e uma trajetória iniciando dentro do conjunto  $\omega_l$  é atraída para o ponto de equilíbrio.

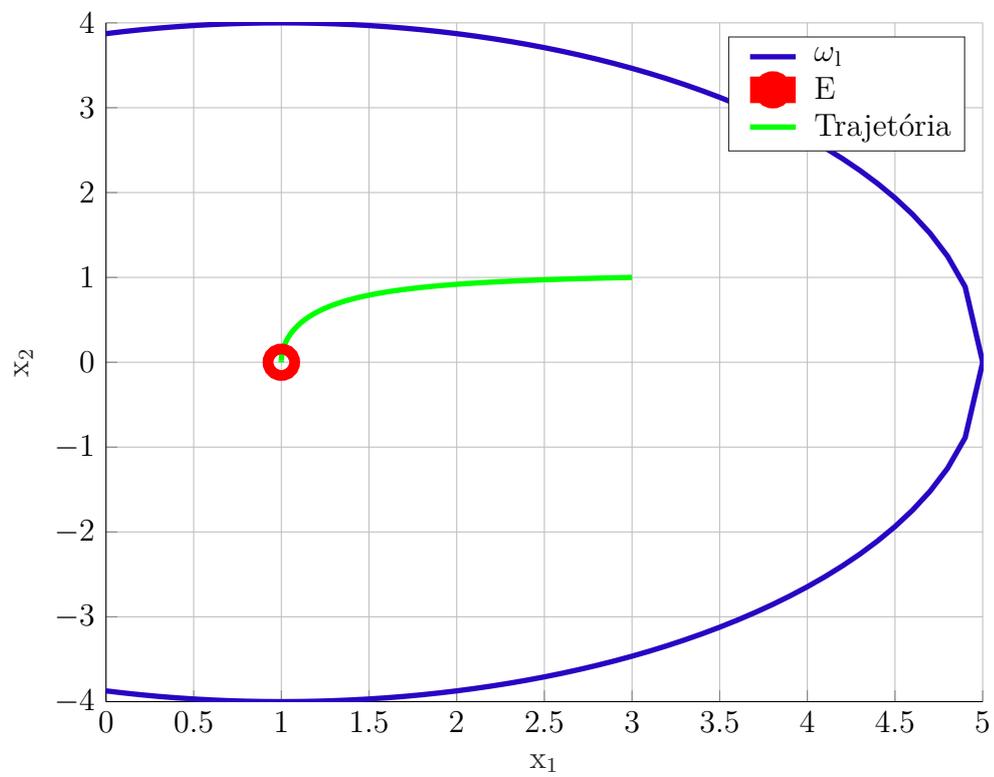


Figura 2 – Trajetória atraída para o ponto de equilíbrio  $(1, 0)$   
Fonte: Gerada pelo MATLAB.

### 3 Exercício 3

O exercício 3 trata do problema de controlar um integrador duplo com um controlador PD fuzzy. O valor da questão é 2,5 pontos e a distribuição de pontos foi feita como se segue:

**Item (i)** (Total = 1,0 pt):

- Obter o controlador fuzzy - 0,70 pts
- Garantir o sobressinal menor que 10% - 0,30 pts

**Item (ii)** (Total = 0,50 pt):

- Acrescentar uma ação integral - 0,50 pts

**Item (iii)** (Total = 1,0 pts):

- - Ilustrar o comportamento do sistema realimentado com uma entrada perturbação em 20s - 0,50 pts
- Provar que o erro em regime com a perturbação foi eliminado - 0,50 pts

**Observação:** Os passos utilizados no projeto foram levados em consideração somente como meio de compreender o raciocínio e para verificar que foi utilizada a técnica Fuzzy corretamente. As funções de pertinência utilizadas ou o método como foram obtidos os ganhos não foram critério de avaliação. Assim, o gabarito apresentado para essa questão serve como exemplo, mas não é necessário que os demais projetos estejam iguais.

#### RESOLUÇÃO:

#### 3.1 Item (i)

Inicialmente, pode-se analisar que a utilização de um controlador com apenas a ação proporcional não é capaz de garantir estabilidade ao sistema. Para tal, considere um controlador proporcional de ganho  $k_p$ . Assim, a função de transferência da malha fechada com realimentação unitária negativa será:

$$H(s) = \frac{k_p}{s^2 + k_p} \quad (3.1)$$

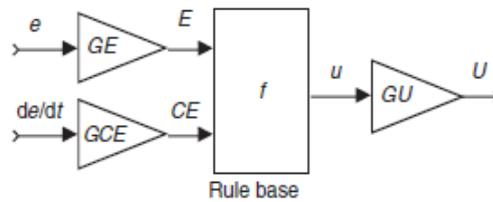


Figura 3 – Controlador *fuzzy* PD  
 Fonte: (JANTZEN, 2007).

Pode-se analisar de 3.1 que, se  $k_p < 0$ , os polos da planta serão reais, mas um deles positivo, caracterizando a instabilidade do sistema. Por outro lado, se  $k_p > 0$ , então os autovalores serão complexos conjugados e, portanto, o sistema será marginalmente estável. Assim, utiliza-se um controlador com ação proporcional e derivativa. O diagrama de blocos do controlador *fuzzy* PD é exibido na Figura 3.

Inicialmente, projetou-se um controlador linear, o qual será descrito a seguir. O sistema criado possui duas entradas, erro ( $e$ ) e variação do erro ( $de/dt$ ), com três funções de pertinência para cada entrada, e cinco funções de pertinência para a saída, sendo estas exibidas na Figura 4. Na Tabela 3 pode-se analisar o conjunto de regras adotadas para o sistema. É possível perceber a existência de uma simetria da diagonal secundária com relação às variáveis linguísticas de saída que é necessária para obter-se uma superfície de controle linear, exibida na Figura 5.

Para garantir a linearidade, torna-se necessário adotar alguns critérios no desenvolvimento do controlador *fuzzy*, dados a seguir (JANTZEN, 2007).

1. Base de regras contendo todas as combinações possíveis das entradas;
2. Funções de pertinências triangulares para as entradas, sendo igualmente espaçadas e se cruzando em pontos nos quais o valor da pertinência é 0,5;
3. Uso de multiplicação para o conectivo E;
4. Funções de pertinência para a saída do tipo *singletons* posicionadas nos picos das funções de pertinência da entrada;
5. Acumulação por soma;
6. Método de *defuzzificação* por centro de área.

As variáveis linguísticas escolhidas e seus respectivos significados são dados nas Tabelas 1 e 2.

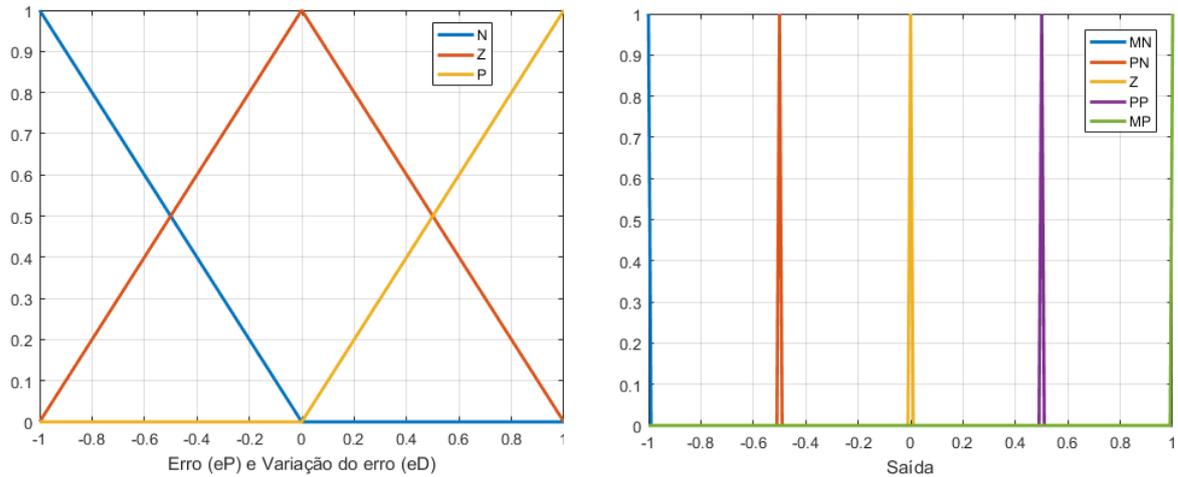


Figura 4 – Entradas e saída do sistema *fuzzy*.  
 Fonte: Gerada pela *toolbox fuzzy* do MATLAB.

Tabela 1 – Variáveis linguísticas adotadas para as entradas do sistema *fuzzy*.

Variável linguística	Significado
P	“Positivo”
Z	“Zero”
N	“Negativo”

Tabela 2 – Variáveis linguísticas adotadas para a saída do sistema *fuzzy*.

Variável linguística	Significado
MP	“Muito positivo”
PP	“Pouco positivo”
Z	“Zero”
PN	“Pouco negativo”
MN	“Muito negativo”

Tabela 3 – Regras de inferência do sistema *fuzzy* linear.

		eD		
		N	Z	P
eP	N	MN	PN	Z
	Z	PN	Z	PP
	P	Z	PP	MP

Para o desenvolvimento do controlador *fuzzy* não-linear, tomou-se como base o controlador *fuzzy* linear, inserindo as não-linearidades neste por meio da alteração das funções de pertinência das entradas. As funções de pertinência são exibidas na Figura 6.

Para tal, utilizou-se funções trapezoidais para a variável Negativo (N) e Positivo (P) alcançando uma maior extensão no universo de discurso. Para a variável Zero (Z), manteve-se uma função de pertinência triangular, contudo menos estreita se comparada ao *fuzzy* linear, de forma que o erro e sua variação só são considerados nulos em uma faixa

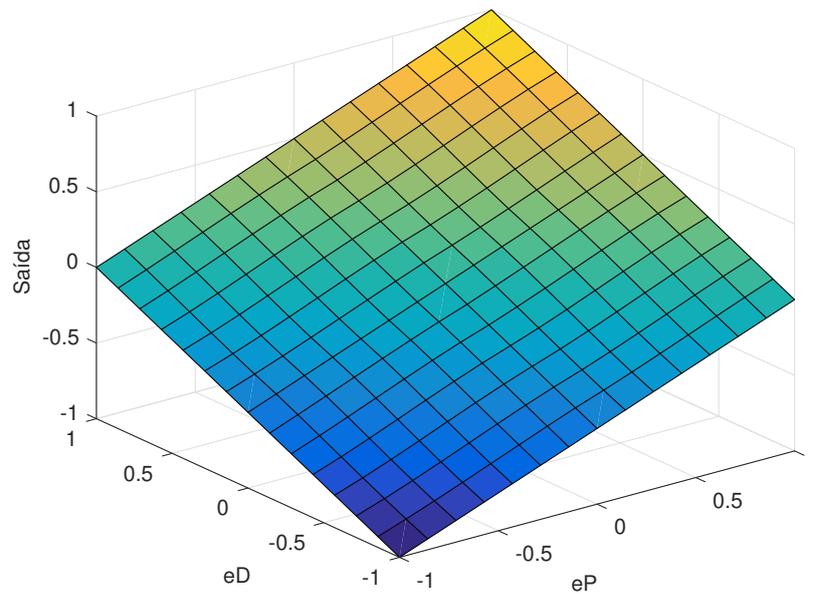


Figura 5 – Superfície de controle *fuzzy* linear.  
Fonte: Gerada pela *toolbox fuzzy* do MATLAB.

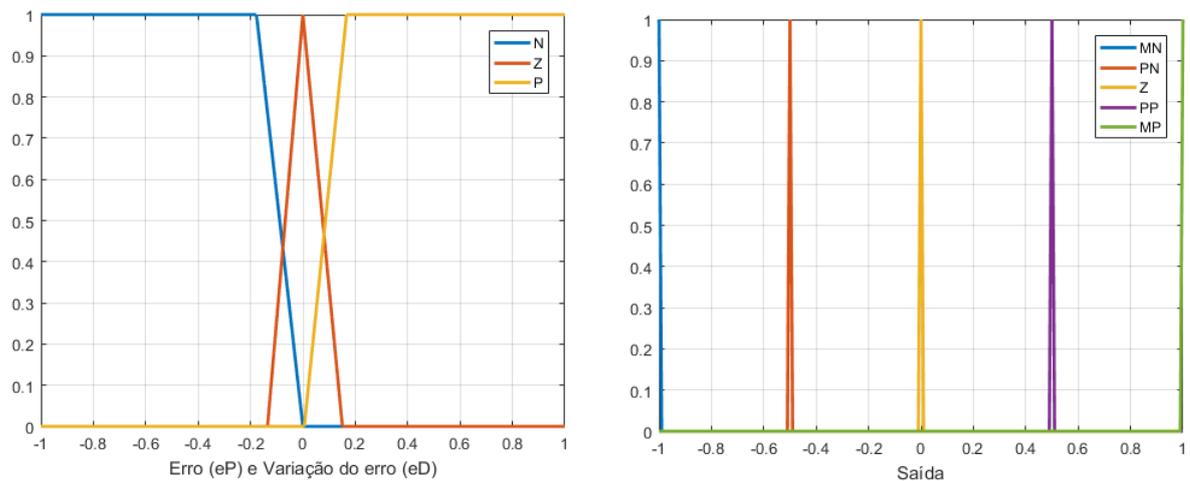


Figura 6 – Entradas e saída do sistema *fuzzy* não-linear.  
Fonte: Gerada pela *toolbox fuzzy* do MATLAB.

pequena de valores. O conjunto de regras inferência aqui utilizado é idêntico ao proposto para o *fuzzy* linear, exibido na Tabela 3.

A Figura 7 mostra a superfície de controle do controlador *fuzzy* não-linear. Pode-se perceber uma ação de controle mais intensa nas regiões extremas das entradas, isto é, quando os valores de erro e da variação do erro são altos. Para a região intermediária, na qual o erro e sua variação são pequenos, a saída é menos intensa. A sintonia dos ganhos foi feito por meio da sintonia manual, observando algumas regras.

1. O ajuste de GE deve maximizar o universo de discurso, mas a escolha de um valor

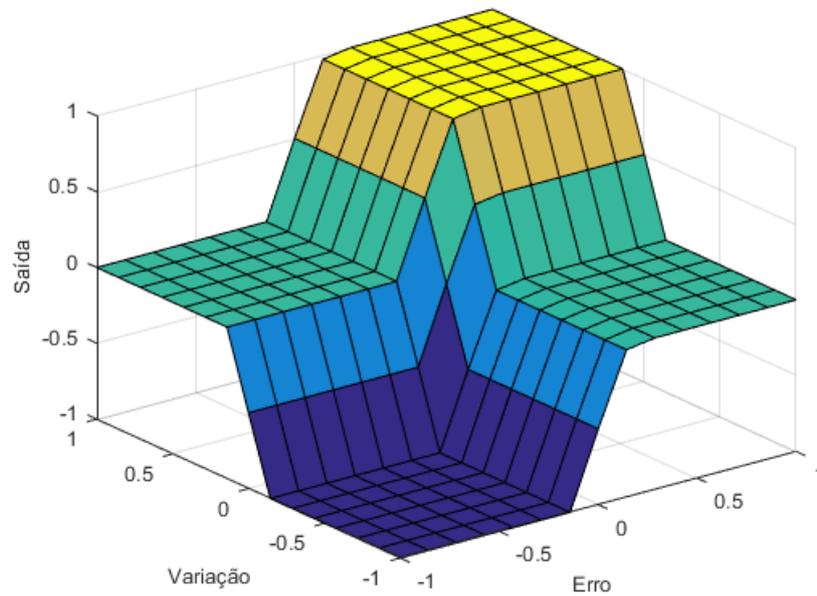


Figura 7 – Superfície de controle *fuzzy* não-linear.  
Fonte: Gerada pela *toolbox fuzzy* do MATLAB.

muito grande torna o sistema menos estável;

2. O ajuste de  $GCE$  deve ser um valor tão grande quanto possível preserva a estabilidade do sistema;
3. O ganho  $GU$  deve ser grande o suficiente sem criar sobressinal. Caso seu valor seja pequeno, o sistema pode apresentar-se lento. Caso seu valor seja demasiadamente grande, o sistema pode apresentar-se instável.

Os ganhos foram  $GE = 1$ ,  $GCE = 0.7$  e  $GU = 17$ . A resposta da planta em malha fechada com o controlador *fuzzy* PD é exibida na Figura 8. Nela, pode-se perceber que o valor de pico atingiu  $y = 0.097$ , caracterizando um *overshoot* de 9.7%.

### 3.2 Item (ii)

Para inserir uma ação integral ao controlador *fuzzy*, deve-se projetar um *fuzzy* PD+I, cujo diagrama de blocos é exibido a seguir na Figura 9. O sistema *fuzzy* utilizado foi idêntico ao descrito no item (i). A ação integradora foi implementada com um ganho de  $GIE = 0.1$ , sendo a sintonia dos ganhos realizada pelo método manual. Deve-se notar que a planta é do tipo 2 e, portanto, apresenta erro de regime nulo para uma entrada degrau unitário. Contudo, aplicando-se uma perturbação do degrau na entrada da planta deixa-se a resposta com erro de regime, sendo necessário, portanto, a utilização da ação integral de controle.

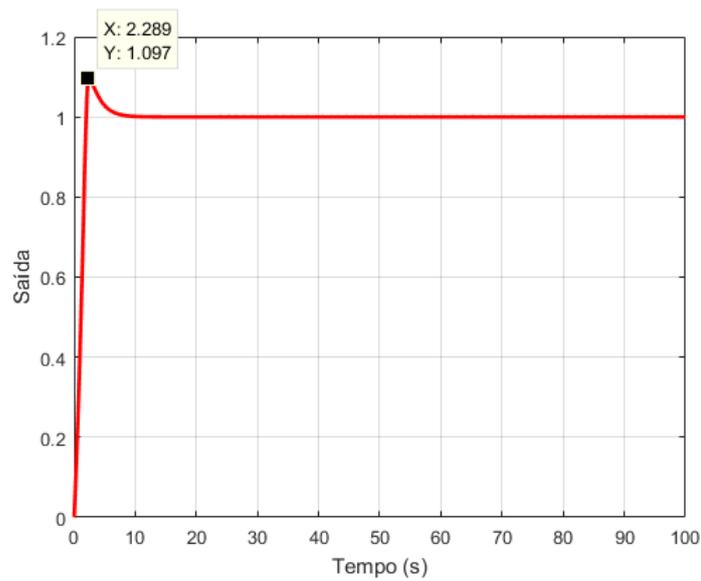


Figura 8 – Resposta em malha fechada com o controlador não-linear *fuzzy* PD  
 Fonte: Gerada pelo MATLAB/Simulink.

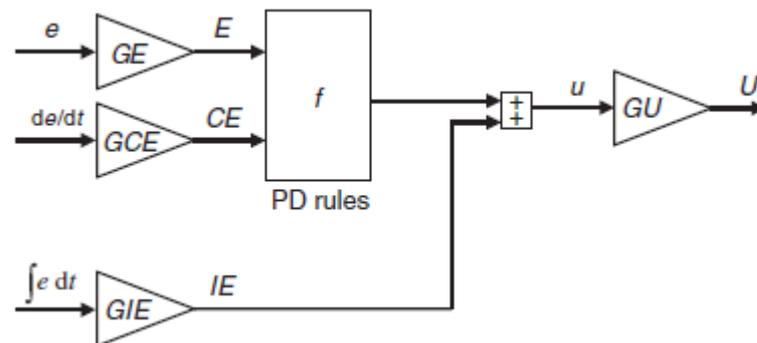


Figura 9 – Controlador *fuzzy* PD+I  
 Fonte: (JANTZEN, 2007).

### 3.3 Item (iii)

Para ilustrar o comportamento descrito no item (ii), aplicou-se uma perturbação degrau na entrada da planta em  $t = 20s$  para a planta com realimentação unitária negativa. A resposta temporal é exibida na Figura 10. Nela, pode-se notar que após aplicação da perturbação na entrada da planta, o controlador foi capaz de eliminar o erro de regime gerado retornando a saída para a referência.

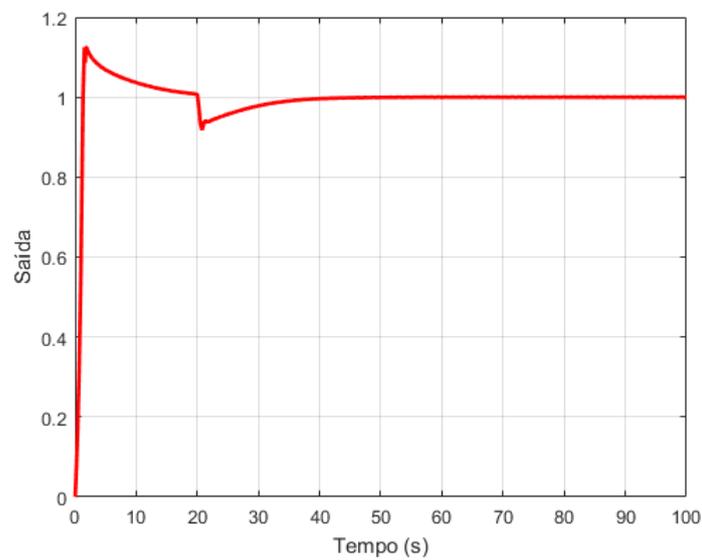


Figura 10 – Resposta em malha fechada com o controlador não-linear *fuzzy* PD+I para uma perturbação em  $t = 20s$

Fonte: Gerada pelo MATLAB/Simulink.

# Referências

JANTZEN, J. **Foundations of fuzzy control**. [S.l.]: Wiley Online Library, 2007. v. 209.