Lista Suplementar 6

Nícolas André da Costa Morazotti

20 de julho de 2020

Questão 1

A figura 1 mostra um circuito RC. O capacitor está inicialmente descarregado. Com base em considerações físicas, sem recorrer às leis de Kirchoff, encontre (i) a corrente inicial e (ii) a carga e a corrente no capacitor no regime estacionário, isto é, quando a corrente não depende o tempo. *Sugestão: para a corrente não depender do tempo, a carga no capacitor também deverá ser independente do tempo.*

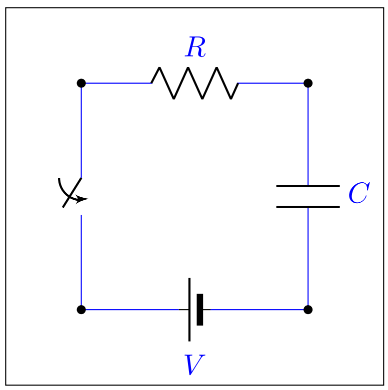


Figura 1: Questões 1 a 5.

Quando o circuito é fechado e capacitor está descarregado, não há cargas, de modo que haja uma queda na diferença de potencial proporcionada pelo mesmo. Portanto, a corrente inicial é dada por

$$V = RI \tag{1}$$
$$I = \frac{V}{R}. \tag{2}$$

No regime estacionário, o capacitor se encontra completamente carregado, isto é,

$$Q = CV. \tag{3}$$

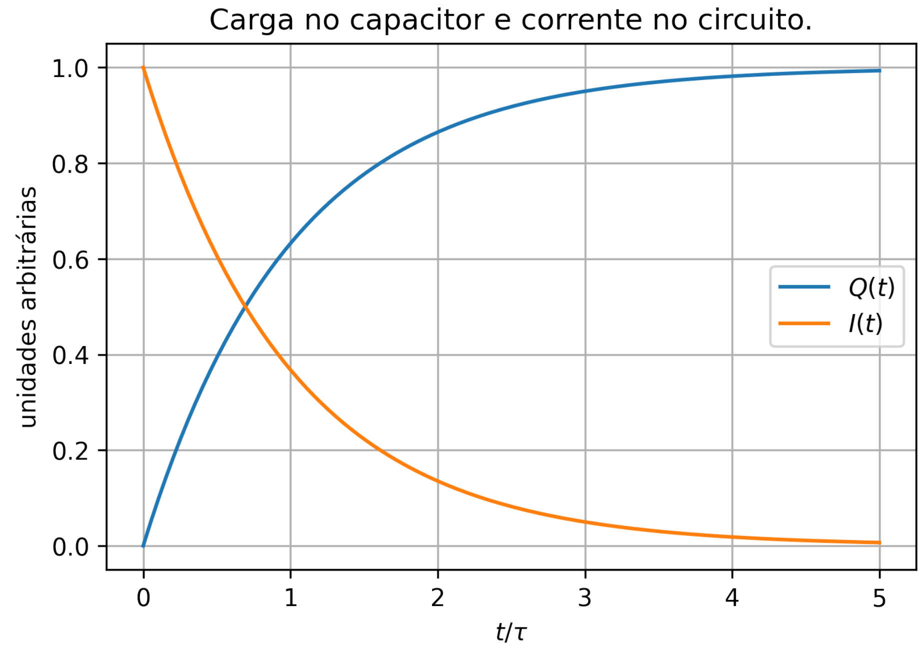
Questão 2

Por análise dimensional, encontre o tempo característico τ que define a escala de tempo do problema e esboce os gráficos da corrente e da carga no capacitor em função do tempo.

Utilizando em conjunto as equações 2 e 3, vemos que V/R tem uma unidade de carga por tempo, enquanto CV tem unidade de carga. Assim, podemos definir uma unidade de tempo calculando a razão de CV por V/R.

$$\frac{CV}{V/R} = \frac{CV}{V} \cdot R = RC = \tau. \tag{4}$$

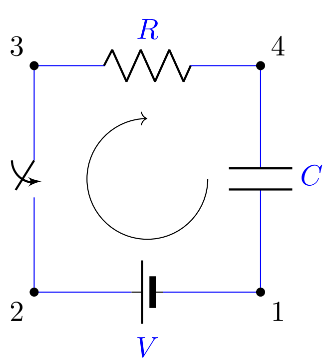
Já discutimos tal grandeza anteriormente.



Questão 3

Encontre a equação diferencial para a carga no capacitor em função do tempo.

Utilizando a lei das malhas de Kirchoff, considere o circuito com os pontos nomeados abaixo.



Já que o potencial em um certo ponto é determinado univocamente pelo ponto em que estamos, ao partir de 1 e circularmos, em sentido horário, o circuito, não deve haver diferença de potencial. Assim, partindo de 1 e analisando as quedas de potencial,

$$V - RI - \frac{Q}{C} = 0. \tag{5}$$

Utilizando $I = \dot{Q}$,

$$R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = V \tag{6}$$
$$\dot{Q} + \frac{Q}{RC} = \frac{V}{R}. \tag{7}$$

Questão 4

Resolva a equação encontrada na questão 3. *Sugestão: a carga no capacitor no regime estacionário é solução da equação não-homogênea. Resolva a equação homogênea e imponha a condição inicial encontrada na questão 1.*

Vamos resolver a equação de três maneiras. Primeiramente, vamos utilizar a sugestão dada. Outra maneira é utilizar que V/R é uma constante e utilizar isso para desaparecer este termo. A terceira maneira, como de praxe, é computacionalmente.

Seguindo a sugestão, vamos resolver a equação homogênea:

$$\dot{Q} + \frac{Q}{RC} = 0 \tag{8}$$
$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}Q \tag{9}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}Q}{Q} = -\frac{1}{RC}\int \mathrm{d}t \tag{10}$$
$$\ln(Q_H) = -\frac{t}{RC} + A \tag{11}$$
$$Q_H(t) = \alpha e^{-t/RC}. \tag{12}$$

No regime estacionário, $Q_H(t \to \infty) = 0$. A solução da equação não homogênea é dada pelo *ansatz* $Q_{NH} = const$:

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}Q_{NH}}{\mathrm{d}t}}_{\equiv 0} + \frac{Q_{NH}}{RC} = \frac{V}{R} \tag{13}$$
$$Q_{NH} = CV. \tag{14}$$

Com a solução homogênea e a não homogênea, nossa solução é a soma das soluções encontradas:

$$Q(t) = Q_H(t) + Q_{NH} \tag{15}$$
$$= CV + \alpha e^{-t/RC}. \tag{16}$$

Podemos encontrar α impondo a condição inicial sobre a carga do capacitor, i.e., $Q(0) = 0$.

$$Q(0) \equiv 0 = CV + \alpha \tag{17}$$
$$\alpha = -CV \tag{18}$$
$$Q(t) = CV(1 - e^{-t/RC}). \tag{19}$$

Outra maneira de se resolver equações diferenciais homogêneas **cuja não-homogeneidade é constante** é utilizar uma substituição de variáveis. Considere a equação diferencial em questão:

$$\dot{Q} + \frac{Q}{RC} = \frac{V}{R}. \tag{20}$$

Vamos subtrair, de ambos os lados, o termo da direita:

$$0 = \dot{Q} + \frac{Q}{RC} - \frac{V}{R} \tag{21}$$

$$= \dot{Q} + \frac{1}{RC}(Q - CV). \tag{22}$$

Veja que podemos fazer a substituição $z \equiv Q - CV$, de maneira que $\dot{z} = \dot{Q}$. Assim, temos apenas uma equação homogênea para resolver:

$$\dot{z} + \frac{z}{RC} = 0. \tag{23}$$

A solução de tal equação é a equação 12, para $z(t)$.

$$z(t) = \alpha e^{-t/RC}. \tag{24}$$

Basta agora voltar à variável Q.

$$Q - CV = \alpha e^{-t/RC} \tag{25}$$

$$Q(t) = CV + \alpha e^{-t/RC}. \tag{26}$$

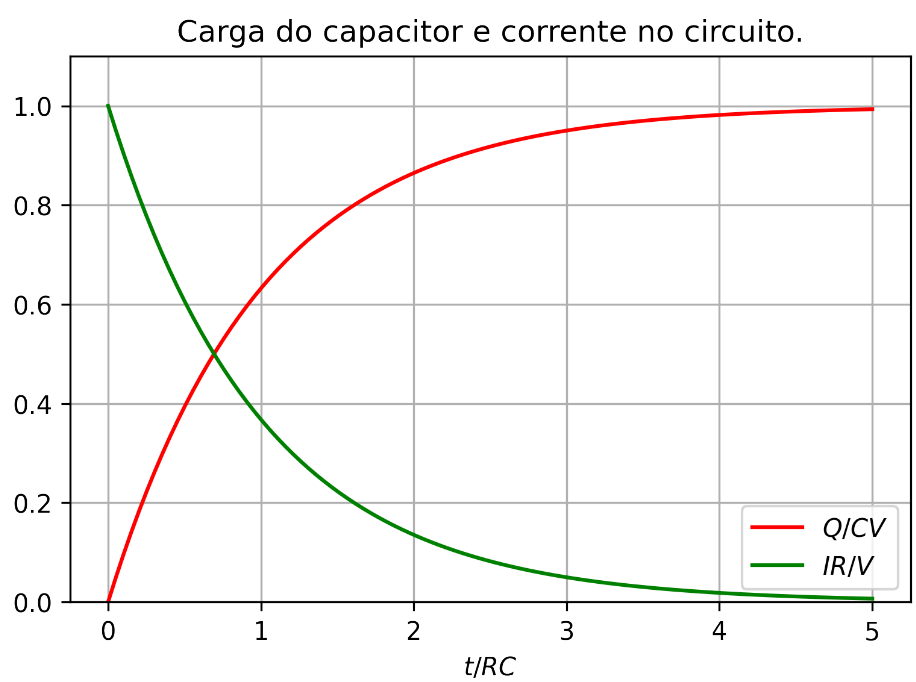
Colocando a condição inicial, temos o mesmo resultado obtido anteriormente.

Resolvendo computacionalmente, temos o mesmo resultado.

```
from sympy import *
from sympy.abc import R,V,C,t

Q = Function("Q")(t)
kirchoff=V-R*Q.diff(t)-Q/C
sol=dsolve(kirchoff, ics={Q.subs(t,0):0})
sol
```

$Q(t) = CV - CVe^{-\frac{t}{CR}}$



Questão 5

Repita a questão 4 com a suposição de que, no instante inicial, o capacitor tem carga $Q = CV$ (onde V é a diferença de potencial entre os polos da bateria, como indicado na figura), sendo que a carga inicial da placa de cima é negativa, e a de baixo, positiva. Desenhe o gráfico da carga em função do tempo.

A mudança deste exercício em relação ao anterior é a condição inicial. Considere então a solução geral para o sistema dada pela equação 16. Veja que podemos escolher, ao invés de $Q(0) = 0$, $Q(0) = Q_0$.

$$Q(0) = Q_0 = CV + \alpha \tag{27}$$

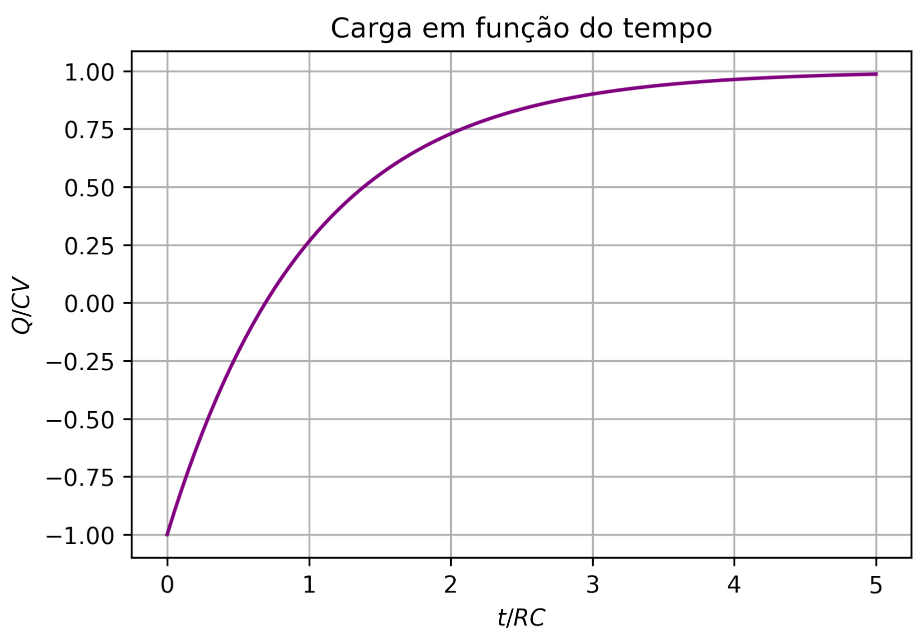
$$\alpha = Q_0 - CV. \tag{28}$$

A solução geral então fica

$$Q(t) = CV + (Q_0 - CV)e^{-t/RC}. \tag{29}$$

Agora precisamos entender qual a carga inicial. A princípio, se colocarmos $Q_0 = CV$, o capacitor estaria completamente carregado no início do tempo. Contudo, veja que a nossa situação inicial tem a carga **negativa** no polo superior da bateria, enquanto na solução de capacitor carregado a carga do polo superior é **positiva**. Então, a condição inicial dada é de $Q_0 = -CV$. A solução deste sistema se torna

$$Q(t) = CV(1 - 2e^{-t/RC}). \tag{30}$$



Questão 6

No circuito LC da figura 2, o capacitor está inicialmente descarregado. Encontre a corrente inicial e a derivada inicial da corrente. *Sugestão: o indutor impede que a corrente sofra a descontinuidade que ocorre no circuito RC.*

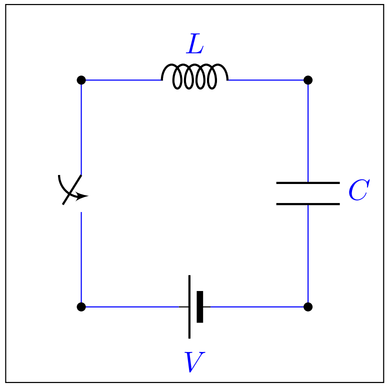


Figura 2: Questões 6-8.

No instante inicial, sabemos que o capacitor está descarregado, o que implica que o indutor é o responsável pela queda de potencial. Assim,

$$V = L\dot{I} \tag{31}$$

$$\dot{I} = \frac{V}{L}. \tag{32}$$

Para instantes de tempo muito próximos do tempo em que fechamos o circuito, o capacitor não tem tempo de reagir. Assim, integrando $\dot{I}$ no tempo, vemos que para t pequeno,

$$I = \frac{V}{L}t. \tag{33}$$

No instante inicial, $I = 0$.

Questão 7

Encontre a equação diferencial que descreve a carga em função do tempo no circuito da figura 2.

Vamos dar os mesmos nomes aos pontos e considerar um caminho no sentido horário, como mostra a figura 3. Partindo do ponto 1 e analisando as quedas de tensão, temos

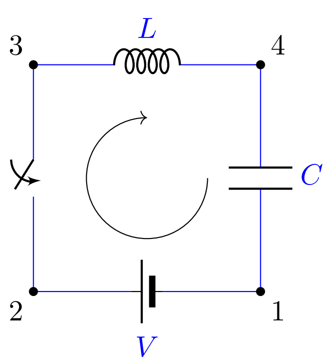


Figura 3: Diagrama da questão 7.

$$V - L\dot{I} - \frac{Q}{C} = 0 \tag{34}$$

$$\dot{I} + \frac{Q}{LC} = \frac{V}{L}. \tag{35}$$

Substituindo $\dot{I} = \ddot{Q}$,

$$\ddot{Q} + \frac{Q}{LC} = \frac{V}{L}. \tag{36}$$

Questão 8

Resolva a equação encontrada na questão 7. *Sugestão: sem resistor, não há regime estacionário. Apesar disso, existe uma solução em que a carga do capacitor é constante. A equação diferencial homogênea é de segunda ordem, mas você deve conhecer a solução.*

Vamos utilizar o segundo método da questão 4 para resolver a equação 36. Subtraindo de ambos os lados o termo à direita,

$$\ddot{Q} + \frac{Q}{LC} - \frac{V}{L} = 0 \tag{37}$$

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}(Q - CV) = 0. \tag{38}$$

A substituição $z = Q - CV$ nos dá $\ddot{z} = \ddot{Q}$. Assim,

$$\ddot{z} + \frac{z}{LC} = 0. \tag{39}$$

Nosso *ansatz* pode ser $z \propto e^{rt}$. Colocando na equação,

$$r^2 e^{rt} + \frac{e^{rt}}{LC} = 0. \tag{40}$$

Como a exponencial nunca é nula, podemos cancelá-la. Nos resta então

$$r = \pm i\sqrt{\frac{1}{LC}} \equiv \pm i\omega \tag{41}$$

$$z = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}. \tag{42}$$

Substituindo z,

$$Q(t) = CV + Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}. \tag{43}$$

O circuito se comporta como um oscilador harmônico forçado por força constante! Colocando as condições iniciais $Q(0) = 0,\ I(0) = 0$, temos

$$Q(0) = 0 = CV + A + B \tag{44}$$

$$B = -CV - A \tag{45}$$

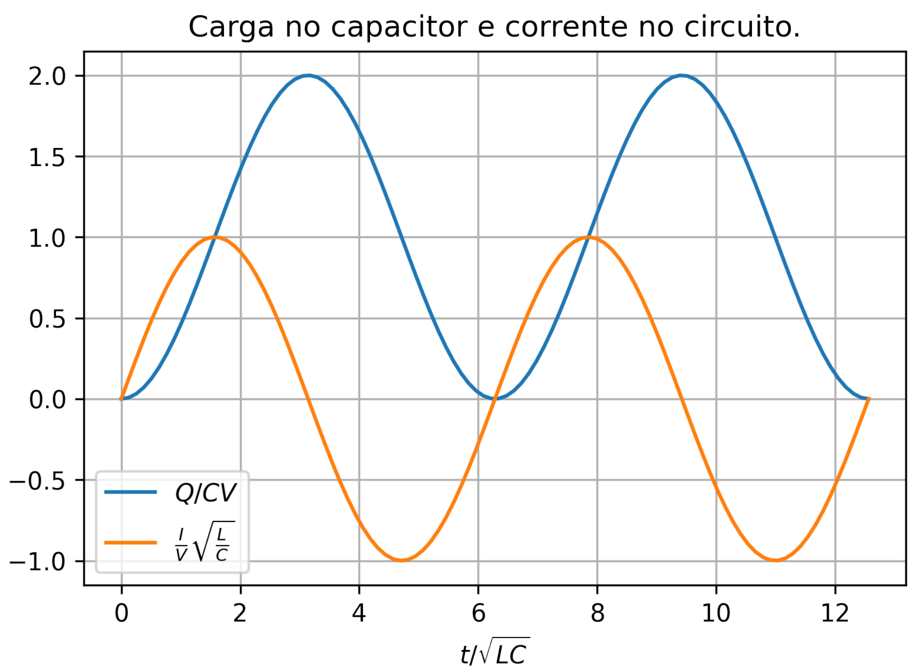
$$Q(t) = CV + Ae^{i\omega t} - (CV + A)e^{-i\omega t}. \tag{46}$$

$$I(0) = 0 = i\omega A + i\omega(CV + A) \tag{47}$$
$$2A = -CV \tag{48}$$
$$A = -\frac{CV}{2} \tag{49}$$
$$Q(t) = CV\left(1 - \frac{1}{2}e^{i\omega t} - \frac{1}{2}e^{-i\omega t}\right) \tag{50}$$
$$= CV\left[1 - \cos(\omega t)\right] \tag{51}$$
$$= CV\left[1 - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right]. \tag{52}$$

```
from sympy import *
from sympy.abc import t

L, C = symbols("L C", real=True, positive=True)
V = symbols("V", real=True)
Q = Function("Q")(t)
sol=dsolve(Q.diff(t,t)+Q/(L*C)-V/L,ics={Q.subs(t,0):0,Q.diff(t).subs(t,0):0})
sol
```

$Q(t) = -CV\cos\left(\frac{t}{\sqrt{C}\sqrt{L}}\right) + CV$



Questão 9

O circuito da figura 4 está na situação mostrada na figura há muito tempo. Fecha-se, então, a chave. Encontre as equações diferenciais que permitem determinar a carga no capacitor e a corrente depois disso. *Sugestão: a malha que corre pelos dois resistores é a mais simples.*

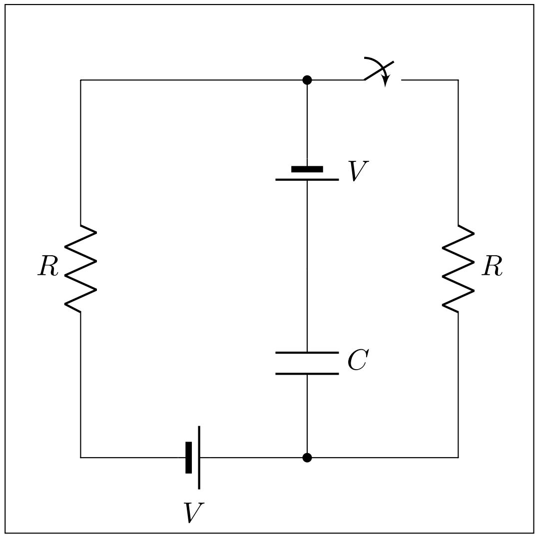
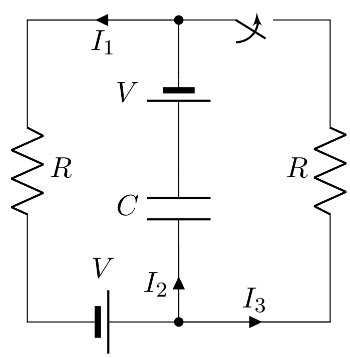


Figura 4: Questão 9.

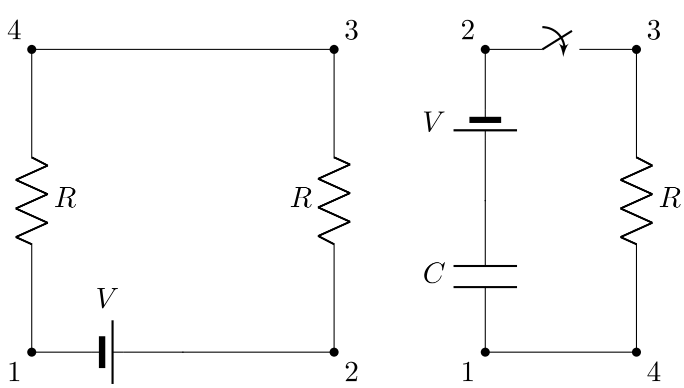
Para podermos determinar as equações diferenciais, precisamos lançar mão das leis de Kirchoff. Primeiro, nos atentemos à lei das malhas. Considere as correntes segundo o esquema a seguir:



Tal circuito nos dá a equação

$$I_1 = I_2 + I_3,$$

que será importante para resolver as equações. Considere agora a lei das malhas. Escolheremos as seguintes malhas: No primeiro circuito, a lei de Kirchoff é tranquila: passa I_3 pelo resistor da



direita e I_1 pelo da esquerda, que gera a equação diferencial

$$V - RI_3 - RI_1 = 0. \tag{53}$$

No caso da segunda malha, veja que estamos seguindo a corrente I_2 entre 1 e 2, mas seguimos contra o sentido da corrente de 2 a 4. Assim, o resistor **aumenta** o potencial entre 3 e 4. Além disso, vamos contra a bateria, que causa uma queda no potencial. A equação diferencial que obtemos é

$$-\frac{Q}{C} - V + RI_3 = 0. \tag{54}$$

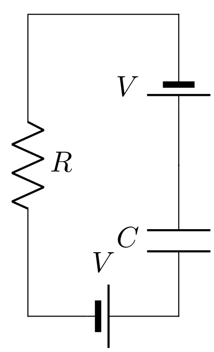
Podemos derivar esta equação no tempo uma vez, desaparecendo com o potencial da bateria e transformando $\dot{Q} = I_2$. Assim, as equações que precisamos resolver são

$$\begin{cases} I_1 - I_2 = I_3 \\ R(I_1 + I_3) = V \\ R\dot{I}_3 - \dfrac{I_2}{C} = 0 \end{cases}. \tag{55}$$

Questão 10

Encontre a carga inicial no capacitor da figura 4 e as correntes iniciais pelos resistores e pelo capacitor.

Quando a chave está aberta, o circuito que nos interessa é o seguinte:



Para calcular a carga do regime estacionário, antes de se fechar a chave, podemos usar a lei de Kirchoff:

$$V - \frac{Q}{C} - V - RI = 0 \tag{56}$$

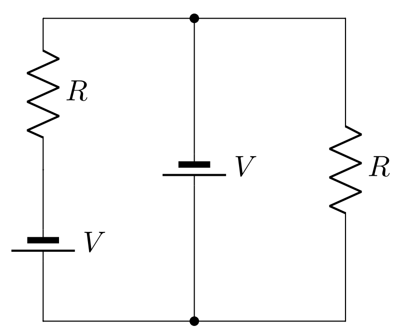
$$R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0 \tag{57}$$

$$Q = \alpha e^{-t/RC}. \tag{58}$$

Claramente, com $t \to \infty$, vemos que a carga no capacitor vai a zero. Quando fechamos a chave, o capacitor descarregado não causa queda na tensão. Assim, podemos redesenhar o circuito como apresentado abaixo.

Perceba que os pontos marcados estão à diferença de potencial V. Assim, os três segmentos da malha devem ter a mesma queda de tensão. Então, nos fios à esquerda e no meio têm correntes nulas (no instante inicial, é claro), mas à direita deve haver uma corrente

$$I = \frac{V}{R}. \tag{59}$$


R
V
V
R