

As questões 6, 11 e 12 envolvem cálculos que não serão considerados na prova 2.

MAE 121 - Introdução à Probabilidade e à Estatística I

4a Lista de Exercícios

1. Numa sala temos 5 crianças com idades iguais a 3, 3, 4, 4 e 5. Três crianças são escolhidas, ao acaso e sem reposição, para participar de um jogo. Sejam X e Y as idades da criança mais nova e da mais velha, respectivamente. a) Determine $E(X)$. b) Determine a distribuição de probabilidade conjunta de X e Y . c) Determine a covariância entre X e Y .
2. As variáveis aleatórias X e Y são independentes; $1 - P(X = 0) = P(X = 1) = 1/3$ e Y tem distribuição Uniforme no intervalo $[0, 2]$. Calcule a função da distribuição acumulada das variáveis aleatórias $W = XY$ e $Z = X + Y$.

3. Considere X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \mathbf{1}_{(-\sqrt{3}, \sqrt{3})}(x)$$

onde $\mathbf{1}_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\mathbf{1}_A(x) = 0$ caso contrário. a) Determine $P(X \leq \frac{1}{2})$. b) Determine $\mu = \mathbf{E}(X)$ (valor esperado de X) e $\sigma = \sqrt{\text{var} X}$ (desvio padrão de X).

4. Y tem distribuição uniforme em $(0, 5)$. a) Determine $P(1/4 < Y < 3/2)$. b) Determine $P(1/4 < Y < 3/2 | Y < 1/2)$. c) Qual é a probabilidade de que a equação $4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$ tenha duas raízes reais?
5. A função distribuição de probabilidade acumulada de uma variável aleatória X é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{5}, & -1 \leq x < 2, \\ ax + b, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

- a) Determine os valores de a e b se $P(X = 2) = \frac{1}{5}$ e $P(X = 3) = 0$. b) Se $a = \frac{4}{5}$ e $b = -\frac{7}{5}$ calcule $P(X \leq \frac{5}{2})$. c) Se $a = 0$ e $b = \frac{1}{2}$, calcule $P(X > 0 | X < 3)$.
6. Sejam X_1 e X_2 duas v.a. independentes com distribuição exponencial com parâmetros, respectivamente, λ_1 e λ_2 . Determine a distribuição de probabilidade de $\min\{X_1, X_2\}$
7. Certo tipo de bateria permite uma lanterna funcionar por um tempo que é uma v.a. com média 40 horas e desvio padrão 20 horas. Dispomos de 45 dessas baterias. Estime a probabilidade de que a lanterna possa ser usada por pelo menos 1700 horas.
8. Sendo $X \sim \mathcal{N}(4, 25)$, determine a probabilidade de: a) X ser maior que 2, 5 b) X ser positiva c) X não ser superior a 4, 5 e) X não se afastar da média por mais de um desvio padrão.
9. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ tal que $P(X < 90) = 0,9$ e $P(X < 95) = 0,95$. Determine μ e σ^2 .

10. Uma enchedora automática de garrafas de refrigerantes está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de 1.000 cm^3 e a variância de 100 cm^6 . Pode-se admitir que a distribuição da variável seja normal. (a) Calcule a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que 980 cm^3 . (b) Suponha que se deseja que no máximo 5% das garrafas tenham menos que 990 cm^3 . Como deve ser regulada a média, isto é, qual o ajuste do volume médio, de forma a atender as exigências do inspetor?
11. Sejam X, Y duas v.a. independentes, $X \sim U[0, 3]$, $Y \sim U[1, 5]$. a) Escreva a função densidade de probabilidade conjunta $f_{X,Y}$. b) Calcule $\Pr[X < Y - 1]$. c) Determine a distribuição de probabilidade de W dada por $W = X + 2Y$.
12. Sejam U_1, U_2 v.a.i.i.d., uniformes no intervalo $[0, 3]$. Denote $X = \min\{U_1, U_2\}$ e $Y = \max\{U_1, U_2\}$. a) Calcule a densidade conjunta de (X, Y) . b) Determine $P(X < 1/2 < Y)$.
13. A função distribuição de probabilidade acumulada de uma variável aleatória X , F_X , é dada por
- $$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{x+2}{6}, & 1 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$
- a) Determine $P(X \leq 1)$. b) Determine $P(2 \leq X < 5)$. c) Determine $P(2 \leq X < 5 | X > 1)$.
14. Uma máquina produz roldanas cujos diâmetros são variáveis aleatórias com distribuição normal de média 100 mm e desvio padrão $0,4 \text{ mm}$. Uma roldana segue as especificações adequadas se tiver diâmetro entre $99,5$ e $100,5 \text{ mm}$. (consulte uma tabela da normal) a) Qual é a proporção de roldanas produzidas pela máquina que estão dentro das especificações adequadas? b) O custo de produção de cada roldana é de R\$ $0,17$. Se as roldanas que estão dentro das especificações adequadas são vendidas por R\$ $0,50$, as que têm diâmetro inferior a $99,5 \text{ mm}$ por R\$ $0,12$ e as demais por R\$ $0,20$. Qual é o lucro esperado para cada lote de 100 esferas produzidas pela máquina?
15. Nos pacotes de certa marca de cereal, afirma-se que o peso bruto é de 400 gramas. Da experiência passada, a companhia produtora sabe que os pesos brutos reais são normalmente distribuídos com desvio padrão de 20 gramas. Como poderia o mecanismo de empacotamento ser ajustado para que não mais de 5 pacotes em 100 tenham um peso bruto inferior a 400 gramas?