

Lista de exercícios 9

MAT 111 - Cálculo I - BE

19 de julho de 2020

1. Mostre que $\arcsen(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ para todo $x \in [-1, 1]$.
2. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável e tal que, para todo x , $f'(x) = \alpha f(x)$, onde α é uma constante não-nula. Prove que existe uma constante k tal que, para todo x , $f(x) = ke^{\alpha x}$.
3. Determine $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que

$$f'(x) = 2f(x) \quad \text{e} \quad f(0) = 1.$$

Sugestão: Use o exercício anterior.

4. Sejam f e g duas funções definidas e deriváveis em $\mathbb{R}$. Suponha que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ e que, para todo x , $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = -f(x)$.
 - (a) Mostre que, para todo x , $(f(x) - \sin x)^2 + (g(x) - \cos x)^2 = 0$.
 - (b) Conclua de (a) que $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$.
5. Encontre o erro na seguinte argumentação usando integração por partes:
Sejam $u(x) = \frac{1}{x}$ e $v(x) = x$. Então, $du = -\frac{1}{x^2} dx$ e $dv = 1 dx$. Assim,

$$\int u dv = uv - \int v du \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow 0 = 1.$$

6. Calcule:

- | | | |
|--|---|--|
| (1) $\int (3x - 2)^4 dx;$ | (10) $\int x \sec^2(x) dx;$ | (19) $\int x(x + 1)^{10} dx;$ |
| (2) $\int \frac{1}{3x - 2} dx;$ | (11) $\int x \ln^2(x) dx;$ | (20) $\int \frac{3x^2 + 4x + 5}{(x - 1)^2(x - 2)} dx;$ |
| (3) $\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx;$ | (12) $\int x^3 \cos(x^2) dx;$ | (21) $\int \frac{x + 1}{x^2(x^2 + 4)} dx;$ |
| (4) $\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx;$ | (13) $\int \frac{1}{x^2 - 4} dx;$ | (22) $\int \sin(\ln x) dx;$ |
| (5) $\int x\sqrt{x^2 - 1} dx;$ | (14) $\int x^3 \cos(x^4) dx;$ | (23) $\int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx;$ |
| (6) $\int \sin^2(x) dx;$ | (15) $\int \frac{1}{x \ln(x)} dx;$ | (24) $\int \frac{1}{\arcsen(x)\sqrt{1 - x^2}} dx;$ |
| (7) $\int \frac{x - 1}{4 + x^2} dx;$ | (16) $\int \frac{x^2}{1 + x^2} dx;$ | (25) $\int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx;$ |
| (8) $\int \frac{1}{\sqrt{5 - 2x + x^2}} dx;$ | (17) $\int 2x(x + 1)^{2007} dx;$ | (26) $\int \frac{1}{2x^2 + 8x + 20} dx;$ |
| (9) $\int x^2 \ln(x) dx;$ | (18) $\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx;$ | |

$$\begin{array}{lll}
(27) \int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20} dx; & (34) \int e^{-2x} \operatorname{sen}(x) dx; & (41) \int \frac{e^{\operatorname{arctg}(x)}}{1+x^2} dx; \\
(28) \int \sqrt{1-4x^2} dx; & (35) \int \arccos(x) dx; & (42) \int \frac{x^5+x+1}{x^3-8} dx; \\
(29) \int x^5 e^{-x^3} dx; & (36) \int \cos(x) \ln(\operatorname{sen}(x)) dx; & (43) \int x^3 \sqrt{1-x^2} dx; \\
(30) \int x e^{-x} dx; & (37) \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2} dx; & (44) \int \sqrt{3x-2} dx; \\
(31) \int e^x \sqrt{1+4e^x} dx; & (38) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx; & (45) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx; \\
(32) \int \frac{1-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} dx; & (39) \int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos^2(x)} dx; & (46) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx. \\
(33) \int x e^{2x} dx; & (40) \int \frac{x+2}{(x+1)^5} dx; &
\end{array}$$

7. Calcule:

$$\begin{array}{lll}
(1) \int \sec(x) dx; & (6) \int \operatorname{tg}^2(x) dx; & (11) \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x) dx; \\
(2) \int \sec^2(x) dx; & (7) \int \operatorname{tg}^3(x) dx; & (12) \int \frac{\sec^2(x)}{3+2\operatorname{tg}(x)} dx; \\
(3) \int \sec^3(x) dx; & (8) \int \operatorname{tg}^4(x) dx; & (13) \int \operatorname{tg}^5(x) \sec^2(x) dx; \\
(4) \int \sec^4(x) dx; & (9) \int \cos^3(x) dx; & (14) \int \operatorname{sen}^3(x) \cos^2(x) dx; \\
(5) \int \operatorname{tg}(x) dx; & (10) \int \operatorname{sen}(x) \sec^3(x) dx; & (15) \int \cos^5(x) \operatorname{sen}^4(x) dx.
\end{array}$$

Exercícios Extras

1. Calcule:

$$(1) \int \operatorname{sen}^4(x) dx; \quad (2) \int \operatorname{sen}^2(x) \cos^2(x) dx; \quad (3) \int \operatorname{sen}^2(x) \cos^4(x) dx.$$

2. (a) Calcule $\int \operatorname{sen}^6(x) dx$ em função de $\int \operatorname{sen}^4(x) dx$ e depois, resolva-a.

(b) Calcule $\int \cos^4(x) dx$ em função de $\int \cos^2(x) dx$ e depois, resolva-a.

3. (a) Mostre que $\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}$ e $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}$.

(b) Calcule:

$$(1) \int \frac{1}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)} dx; \quad (2) \int \frac{1}{2 + \operatorname{sen}(x)} dx.$$