

Vibrações em sistemas com n graus de liberdade ①

Conforme apontado para sistemas c/ 2 graus de liberdade, obtemos duas equações diferenciais lineares de 2ª ordem nas variáveis escolhidas para representar a configuração mais geral do sistema - tomadas como zero na posição de equilíbrio. A resolução do sistema de equações diferenciais, geralmente acopladas nos permite calcular a evolução do sistema no tempo.

Digamos que temos um sistema de n graus de liberdade, livre e não amortecido e desejamos estudar sua evolução no tempo. Definidas as variáveis função de tempo (tomadas como zero na posição de equilíbrio) e usando TMB e TMBQ ou energia (via Lagrange) obtemos:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(matriz de massa) $n \times n$ (matriz de rigidez) $n \times n$

Lembrando o teorema da reciprocidade ou de Castigliano mostra-se que em sistemas físicos lineares existe simetria na matriz de elasticidades e portanto em sua inversa, a matriz de rigidez. Portanto se em cada ^{um dos} pontos do sistema tivermos uma massa discreta associada, obtemos uma matriz de massas diagonal e uma matriz de rigidez simétrica. Como essas equações podem ser combinadas linearmente, podemos no ~~geral~~ caso mais geral obtermos uma matriz de massas simétrica associada a uma matriz de rigidez também simétrica.

Vamos buscar soluções, analogamente ao que foi feito em sistemas c/ dois graus de liberdade,

(2)

$$\begin{bmatrix} M \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Se pre-multiplicarmos o sistema de equações pelo inverso da matriz de massas obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M \end{bmatrix}_{n \times n}^{-1} \begin{bmatrix} K \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Buscando soluções harmônicas $\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \cdot \sin(\omega t + \phi)$
Derivando 2 vezes no tempo e substituindo, obtemos

$$\begin{bmatrix} -\lambda^2 \mathbf{I} \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

onde $[A]$ é a matriz dinâmica do sistema e $\lambda = \omega^2$

Chegamos novamente em problema de autovalores (λ) e autovetores. Para obtermos x_i diferentes de zero devemos impor que o determinante de $[A] - \lambda[I] = 0$

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}_{n \times n} - \lambda \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Obtemos uma equação de grau n em λ , que resolve a forma n valores $\lambda_i = \omega_i^2$ (frequências naturais ao quadrado).
Para cada ω_i (frequência natural) e seu correspondente λ_i (autovetor) podemos obter o autovetor $\{x\}_i$, que forma o modo de vibrar correspondente.

$$\{x\}_i = \begin{Bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{Bmatrix}$$

Observar que quando impusemos determinante da matriz igual a zero, tornamos as equações linearmente dependentes e que os autovetores são definidos pelas relações entre $x_{1i}, x_{2i} \dots$ etc.

Ortogonalidade dos modos de vibrar em relação as molas e massa e rigidez

para o autovalor λ_i e seu correspondente autovetor $\{X\}_i$ podemos escrever

$$[K]\{X\}_i = \lambda_i [M]\{X\}_i$$

Se premultiplicarmos por $\{X\}_i^T$, transposto ^{vetor linha} obtemos

$$\{X\}_i^T [K] \{X\}_i = \lambda_i \{X\}_i^T [M] \{X\}_i$$

Se começarmos pelo autovalor λ_j e seu correspondente autovetor $\{X\}_j$ obtemos

$$\{X\}_j^T [K] \{X\}_j = \lambda_j \{X\}_j^T [M] \{X\}_j$$

Mas porque a matriz $[K]$ é simétrica, o lado esquerdo das equações é idêntico como também a matriz $[M]$ é simétrica podemos escrever

$$(\lambda_i - \lambda_j) \{X\}_j^T [M] \{X\}_i = 0. \text{ Se } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ os autovetores são ortogonais em relação a } [M]$$

~~Analogamente~~ Portanto são também ortogonais em relação a matriz $[K]$

$$\{X\}_j^T [K] \{X\}_i = 0$$

Lembrar que a ortogonalidade de vetores definida em geometria é um caso particular em que a matriz é a matriz identidade $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Se fizermos a mesma operação com $\lambda_i = \lambda_j$ ($i=j$)

obtemos $\{X\}_i^T [M] \{X\}_i = m_i$ (massa generalizada do modo i)

$$\{X\}_i^T [K] \{X\}_i = k_i \text{ (rigidez generalizada do modo } i)$$

Como os modos de vibrar são definidos a menos de uma constante multiplicativa é usual normalizar os vetores modais para definir as massas e rigidezes generalizadas normalizadas. (Não é estrito!)

Matriz modal $[\Phi]$

Se montarmos uma matriz onde cada coluna corresponde a um dos modos de vibraç, ela contém todas as informações de ortogonalidade do sistema e pode ser usada para desacoplar as equações diferenciais.

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \{x\}_1 & \{x\}_2 & \{x\}_3 & \dots & \{x\}_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Voltando para nosso sistema inicial e definindo um novo conjunto de variáveis

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \quad \{y(t)\} = [\Phi]^{-1}\{x(t)\}$$

podemos escrever

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{y}(t)\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{y(t)\} = [\Phi]^T \{0\} = \{0\}$$

e portanto, pela ortogonalidade entre os ^{auto}vetores obtidos:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{y}_n(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

um conjunto de equações diferenciais desacopladas.

Sistema de n graus transformado em n sistemas de 1 grau de liberdade cada qual com sua frequência natural.

E se formos estudar as vibrações em um sistema linear amortecido com excitação e com n graus de liberdade

O sistema de equações diferenciais fica:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F(t)\}$$

$\begin{matrix} n \times n & & n \times n & & n \times n & & n \times 1 \\ \text{vetor de acelerações} & & \text{vetor de velocidades} & & \text{vetor de deslocamentos} & & \text{vetor de excitação} \end{matrix}$

Se a matriz de amortecimento é proporcional às matrizes de massa e rigidez (5)

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

a mesma transformação de coordenadas que desacopla o sistema não amortecido, desacopla $y(t)$.

Seja $[\Phi]$ a matriz modal e as novas variáveis $\{y(t)\} = [\Phi]^{-1}\{x(t)\}$, o sistema de equações diferenciais

$$[\Phi]^T[M][\Phi]\{\ddot{y}(t)\} + \{\alpha[\Phi]^T[M][\Phi] + \beta[\Phi]^T[K][\Phi]\}\{\dot{y}(t)\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{y(t)\} = [\Phi]^T F(t)$$

que forma um sistema

de n equações desacopladas do tipo:

$$\begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & \ddots \\ & & & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \vdots \\ \ddot{y}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & c_2 & \\ & & \ddots \\ & & & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & \ddots \\ & & & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [\Phi]^T F(t)$$

com a seguinte solução para $i=1, \dots, n$

$$m_i \ddot{y}_i + c_i \dot{y}_i + k_i y_i = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij} F_j(t)$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}; \quad \xi_i = \frac{c_i}{2\sqrt{k_i m_i}}; \quad y_i(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} [A_i \sin(\omega_d t) + B_i \cos(\omega_d t)] \quad p/r < 1$$

$$y_p(t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(t)$$

cada uma das soluções particulares de cada termo

Se o amortecimento não for proporcional devem ser buscadas soluções do tipo $\{x(t)\} = \{A\} e^{st}$, com as quais chegariamos a

a um problema de auto-valores e autovetores, com uma equação característica de grau $2n$ em s com raízes reais ou pares de complexos conjugados e os respectivos modos de vibrações. Outra abordagem, mais amigável computacionalmente é o do espaço de estado no qual as n variáveis de 2º ordem são transformadas em $2n$ variáveis em equações diferenciais de 1º ordem.