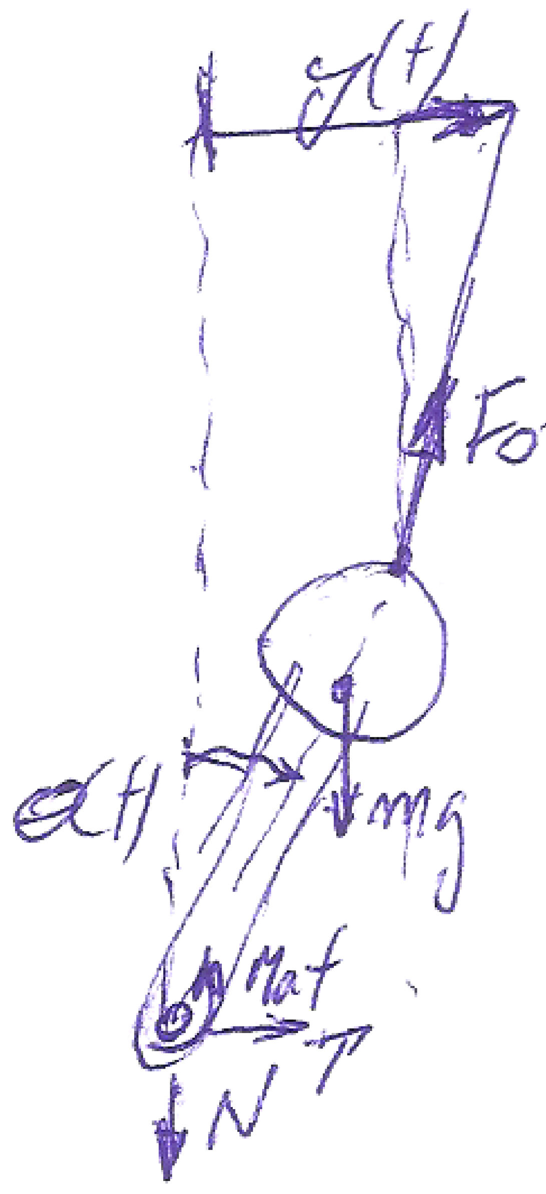
P2 14/07/2020

1ºQ



$$TMA)_0 \Rightarrow J_0 \cdot \ddot{\theta}(t) = mg \cdot a \cdot \theta - F_0 \cdot L\theta + F_0 \frac{(y - L\theta)}{L} \cdot L - \frac{M_{at}\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}$$

$$\boxed{J_0 \ddot{\theta}(t) + M_{at} \cdot \frac{\dot{\theta}(t)}{|\dot{\theta}(t)|} + (2F_0L - mga)\,\theta(t) = F_0 \cdot y(t)}$$ (a)

$M_{at} \simeq \mu_{esc} |F_0 - mg| \frac{d}{2}$ observar que o Mat representado é sempre positivo.

Para estabilidade "restituição elástica" $\boxed{F_0 > \frac{mga}{2L}}$ (b)

(c) $\omega = \sqrt{\frac{2F_0L - mga}{J_0}}$

$J_0 = \frac{3 \cdot mL^2}{4}$; $a = \frac{3}{4}L$; $F_0 = 3mg$

$y(t) = Y \cdot \frac{t}{T}$ p/ $0 \leq t \leq T$

$y(t) = Y$ p/ $t \geq T$

$$\frac{3}{4}mL^2\ddot{\theta} + mg\,d\,\mu_{esc}\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + \underbrace{\cancel{2mga}}_{6mgL - mg\frac{3}{4}L} \cdot \theta = F_0 \cdot Y \frac{t}{T} \quad p/\ 0 \leq t \leq T$$

$$\frac{3}{4}mL^2\ddot{\theta} + mg\,0{,}04L\,\mu_{esc}\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + \frac{21mgL}{4} \cdot \theta = \overset{3mg}{F_0} \cdot \frac{Y \cdot t}{T}$$

$$\frac{1}{7}\frac{L}{g} \cdot \ddot{\theta} + \frac{0{,}16}{21} \times 0{,}2 \cdot \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + \theta = \frac{4 \cdot 3mg}{21mgL} \cdot \frac{Y \cdot t}{T}$$

$$\frac{1}{7}\frac{L}{g} \cdot \ddot{\theta} + 1{,}5 \times 10^{-3}\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + \theta = \frac{4}{7}\frac{Y}{L} \cdot \frac{t}{T} \qquad \omega = \sqrt{\frac{7g}{L}}$$

Solução da homogênea $\theta_h(t) = A\,sen(\omega t) + B\cos(\omega t)$

No 1º meio ciclo $\dot{\theta} > 0$

$$\frac{1}{7}\frac{L}{g} \cdot \ddot{\theta} + \theta = -1{,}5 \times 10^{-3} + \frac{4}{7}\frac{Y}{L} \cdot \frac{t}{T}$$

$$\theta_p(t) = -1{,}5 \times 10^{-3} + \frac{4}{7}\frac{Y}{L} \cdot \frac{t}{T}$$

$$\theta(t) = A\,sen(\omega t) + B\cos(\omega t) - 1{,}5 \times 10^{-3} + \frac{4}{7}\frac{Y}{L} \cdot \frac{t}{T}$$

$$\dot{\theta}(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\,sen(\omega t) + \frac{4}{7}\frac{Y}{L} \cdot \frac{1}{T}$$

Condições iniciais $\Rightarrow$ p/ $t = 0$

$\theta(0) = 0 = B - 1{,}5 \times 10^{-3} \therefore \boxed{B = 1{,}5 \times 10^{-3}}$

$\dot{\theta}(0) = 0 = A\omega + \frac{4}{7}\frac{Y}{LT} \therefore \boxed{A = -\frac{4Y}{7\omega LT}}$

$$\theta(t) = \frac{4Y}{\omega \cdot 7 \cdot L \cdot T} \cdot (\omega t - sen(\omega t)) - 1{,}5 \times 10^{-3} \cdot (1 - \cos(\omega t))$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{4Y}{7LT}\cdot\left(1-\cos(\omega t)\right) - 1{,}5\times10^{-3}\cdot\omega\cdot \operatorname{sen}(\omega t)$$

P/ $t = T$ desejamos $\begin{cases} \theta(T) = 6^\circ = 0{,}105\,\text{rad} \\ \dot{\theta}(T) = 0 \end{cases}$

Se $\omega t = 2\pi$ a equação de $\dot{\theta}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = 0 \therefore \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ (d)

Na equação de $\theta(t)$

$$\theta\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = 0{,}105\,\text{rad} = \frac{4Y}{\omega\cdot 7\cdot L\cdot T}\cdot(2\pi - 0) - 1{,}5\times10^{-3}(1-1)$$

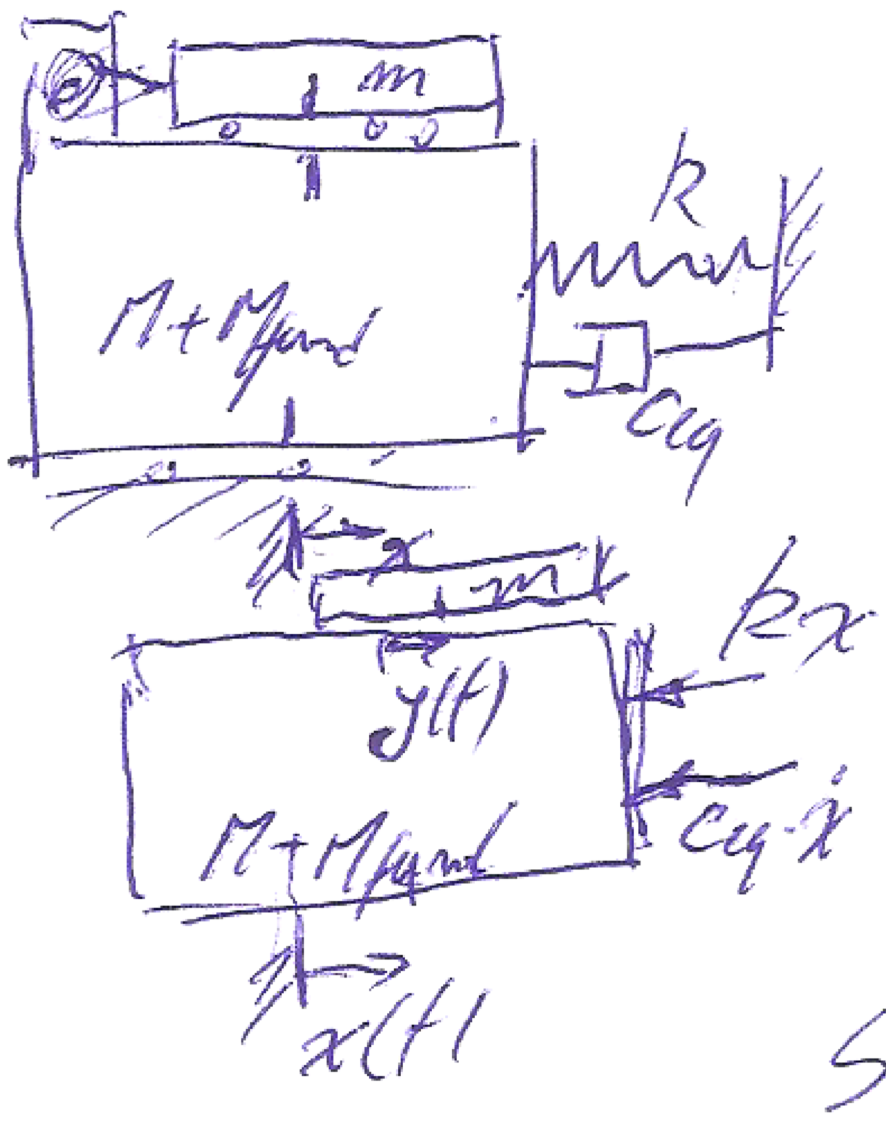
$$0{,}105 = \frac{4Y}{14\pi\cdot L}\cdot 2\pi = \frac{4Y}{7L} \quad \therefore \boxed{Y = \frac{7L}{4}\cdot 0{,}105} \text{ (d)}$$

Observar que a inclinação do fio fica menor do que a do pêndulo

(e) para passar de 6° para 3°, ~~mantimo~~ a condição de não oscilar após a interrupção da manobra se mantém e

$$T_{6\to3} = \frac{2\pi}{\omega}$$

2ª Q)



TMB para o conjunto $\quad y(t) = e\,sen(\omega_f t)$

$$(M+M_f)\cdot\ddot{x} + m(\ddot{\overline{x+y}}) = -kx - c_{eq}\cdot\dot{x}$$

$$(M+M_f+m)\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + kx = m e \omega_f^2 sen(\omega_f t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+M_f+m}} \; ; \; c_{eq} = \frac{b_h \cdot k}{\omega_f}$$

Solução particular

$$x_p(t) = X_p \cdot sen(\omega_f t - \varphi) \; ; \; X_p = \frac{\frac{m e \omega_f^2}{k}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + b_h^2}} \; ; \; r = \frac{\omega_f}{\omega}$$

$$tg\varphi = \frac{b_h}{1-r^2}$$

$$sen\varphi = \frac{b_h}{\sqrt{(1-r^2)^2 + b_h^2}}$$

Solução particular para a mesa (deslocamento absoluto)

$$x_m(t) = x_p(t) + y(t) =$$

$$= X_p\, sen(\omega_f t - \varphi) + e\, sen(\omega_f t) = X_p \cos\varphi \cdot sen(\omega_f t) - X_p sen\varphi \cos(\omega_f t) +$$

$$+ e\, sen(\omega_f t) = \left[\frac{\frac{m e \omega_f^2}{k}}{\sqrt{(1-r^2)^2+b_h^2}} \cdot \frac{1-r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+b_h^2}} + e\right] sen(\omega_f t) + \frac{\frac{m e \omega_f^2}{k} \cdot b_h}{\left(\sqrt{(1-r^2)^2+b_h^2}\right)^2} \cos(\omega_f t)$$

$x_m(t) = X_m \cdot sen(\omega_f t - \varphi_m)$ onde

$$X_m = \sqrt{\left(\frac{\frac{m\omega_f^2}{k}\cdot(1-r^2)}{(1-r^2)^2+b_h^2} + 1\right)^2 \cdot e^2 + \left(\frac{\frac{m\omega_f^2}{k}\cdot b_h}{(1-r^2)^2+b_h^2}\right)^2 \cdot e^2}$$

c) Quanto ao dimensionamento da fundação

1º) Verificar ~~onde~~ estamos com a máquina sem M_f.

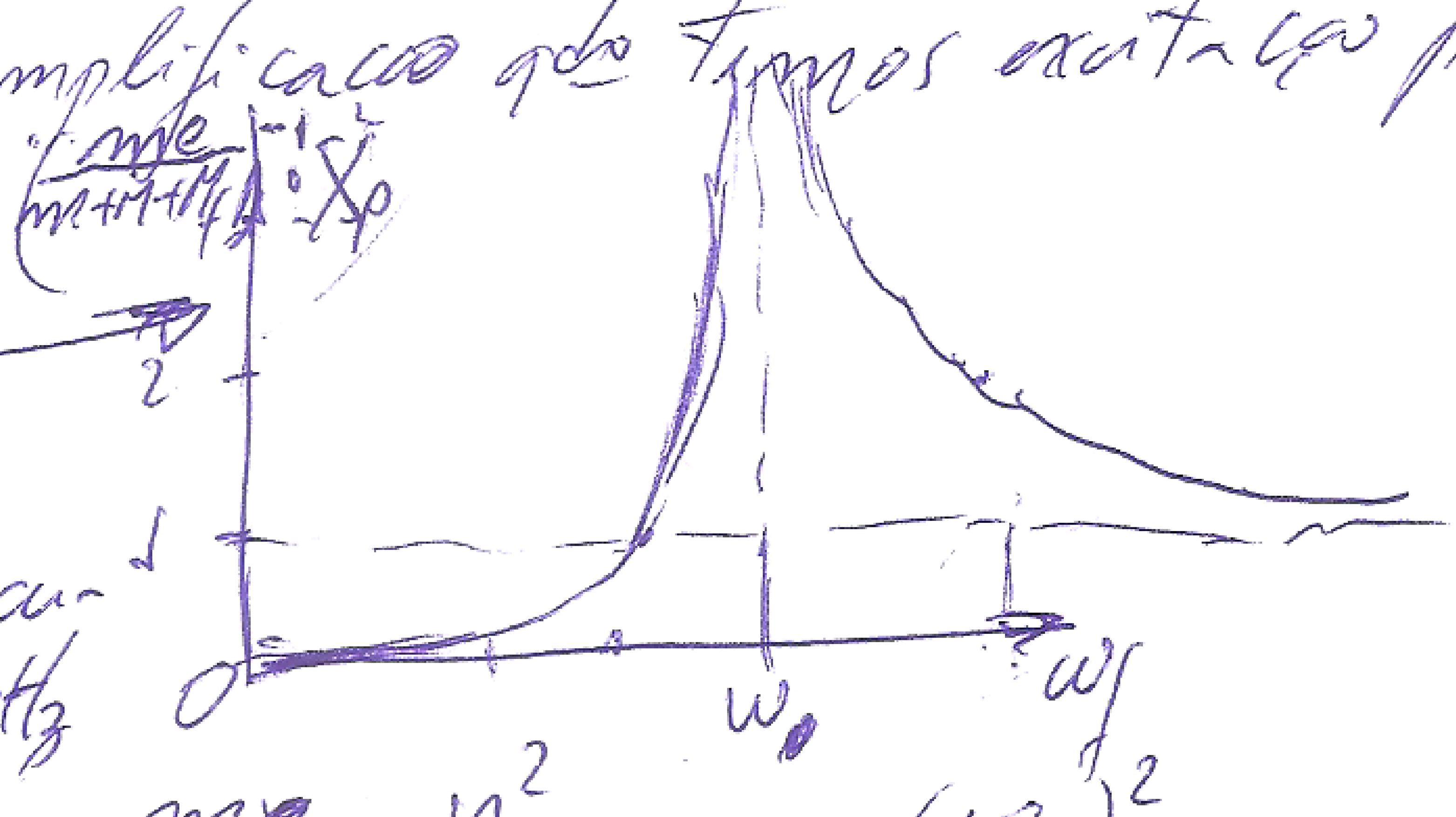
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M+\cancel{M_f}}} = \sqrt{\frac{200\times10^6}{24000}} = 91{,}3 \text{ rad/s} = 14{,}5\ Hz$$

A excitação varia de 1 a 10 Hz. Estamos bastante afastados da ressonância para $b_h^2 \ll (1-r^2)^2$ (cerca de 3% p/ 10 Hz). Nossa solução simplificada fica: $X_p = \dfrac{\frac{m e \omega_f^2}{k}}{1-r^2}$ e

$X_m = X_p + e$ (observar que abaixo da ressonância X e y estão em fase e acima da ressonância em oposição de fa-

Lembrando que a amplificação qdo temos excitação por desbalanceamento

$$\frac{X_p}{\frac{me}{m+M+M_f}}$$



estaremos nos preocupando mais com os 10Hz

$$\frac{X_p}{e} = \frac{X_p \cdot \omega_f}{e\omega_f} = \frac{X_p \omega_f^2}{e\omega_f^2} = \frac{\frac{m}{m+M+M_{f0}}\, r^2}{1-r^2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{10}{14,5}\right)^2}{1-\left(\frac{10}{14,5}\right)^2} = 0,45 \therefore$$

$\boxed{X_m = 0,45 \cdot e + e = 1,45e}$ Mas $\ddot{X}_m = X_m \cdot \omega_f^2 \geq 0,5g \therefore$

$1,45 \cdot e \cdot \underbrace{\omega_f^2}_{(20\pi)^2} \geq 0,5g \therefore e \geq 0,87 \times 10^{-3} m$. Nesta condição

$X_p \omega_f = 0,45 \cdot 0,87 \times 10^{-3} \cdot \omega_f = 24,7 \times 10^{-3} m/s = \boxed{24,7 mm/s}$

Como a velocidade máxima de vibração da fundação deve ser menor que 50mm/s pico a pico, a condição é satisfeita sem qualquer massa adicional na fundação

Para excitação a 5Hz = 10π rad/s $\Rightarrow \frac{X_p}{e} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{14,5}\right)^2}{1-\left(\frac{5}{14,5}\right)^2} = 0,067$

$X_m = (0,067e + e) = 1,067e \therefore \ddot{X}_m = 1,067 e \cdot \omega_f^2 \geq 0,5g \therefore e \geq 4,7 mm$

$\dot{X}_p \cdot \omega_f = 0,067 \cdot 4,7 \cdot (10\pi) = 10 mm/s \therefore$ $\boxed{20 mm/s \text{ pico a pico}}$

Observar que, com esse tipo de excitação, mesmo quando tivermos que aumentar a excentricidade para ter a aceleração necessária para ocorrer o escorregamento sobre a mesa, as frequências mais elevadas são mais críticas, e trazer a frequência natural para abaixo de 1Hz é finalmente conseguiríamos aumentando a massa da fundação satisfazer a demanda. (Massa enorme)

"Sempre veja antes como estamos (frequência natural, etc) para depois projetar a mitigação mais adequada necessária!"