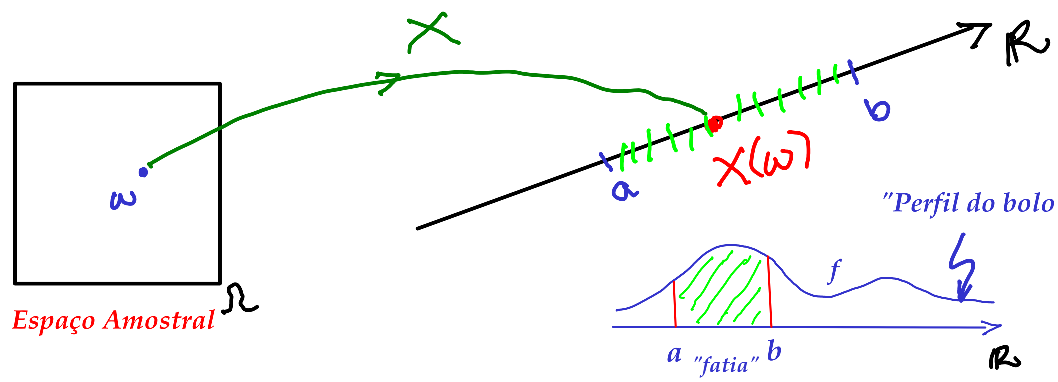
Variáveis aleatórias Contínuas

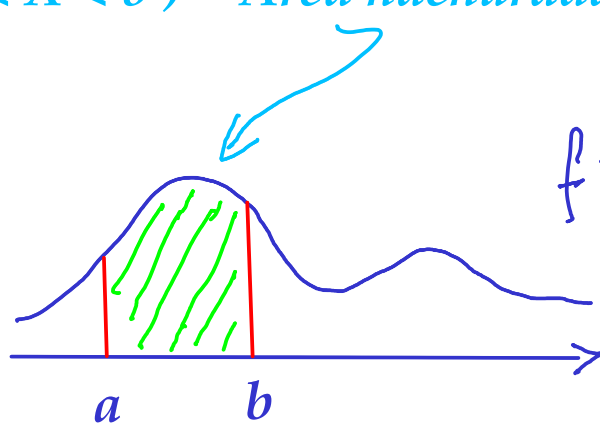


Uma variável aleatória X, ou seja, uma função do espaço amostral com valores em R, é dita uma variável aleatória contínua se existe uma função f, $f \geq 0$, tal que

$$P(\, a < X < b \,) = \int_a^b f(s)\, ds$$

para todo par de números reais (a , b), com $a < b$.

$P(\, a < X < b \,) =$ Área hachurada

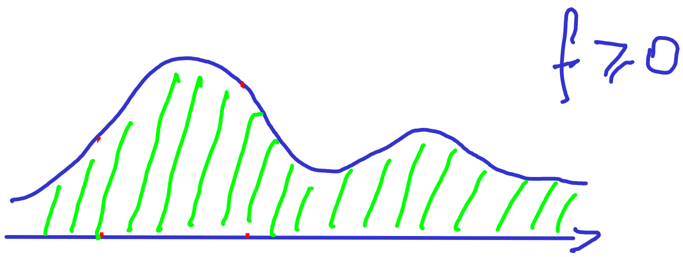


$f \geq 0$

("f é não-negativa")

Note que a função f precisa, alem de ser não-negativa, ter integral total igual a 1

$$P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, ds = 1$$



Área total entre $f \geqslant 0$ e a abscissa é igual a 1

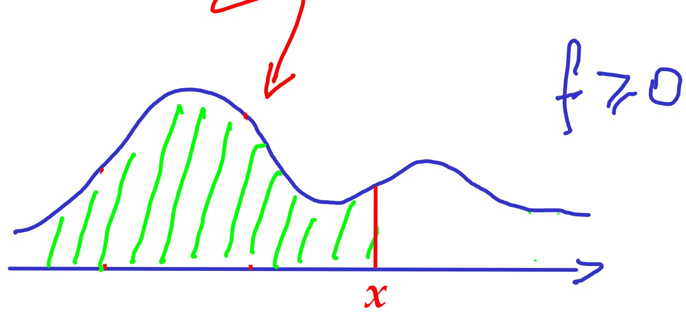
A função f é dita "função densidade de probabilidade de X"

(Se for conveniente, escrevemos f_X ao invés de simplesmente f .)

Sua "função de probabilidade Acumulada F" é definida, como antes para variáveis aleatórias discretas, por

$F(x) = P(X \leqslant x)$, *para todo x real*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds = \text{"Área hachurada"}$$



A definição de Variável Aleatória Contínua envolve a noção de Integral. Mas, neste curso, vamos precisar apenas de alguns resultados elementares, que indicaremos em seguida.

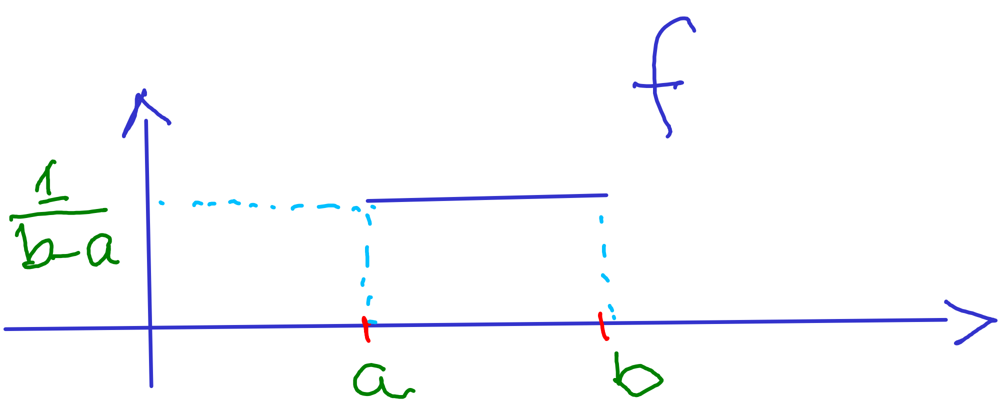
Antes: Exemplo mais simples de variável aleatória contínua:

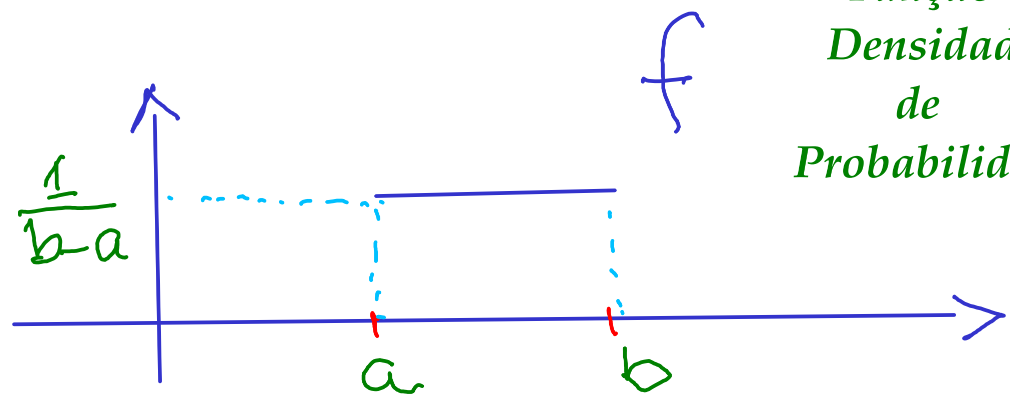
Variável Aleatória X com distribuição uniforme entre dois valores reais a e b, com $a < b$.

Notação: $X \sim U(a, b)$ (ou $X \sim U([a, b])$)

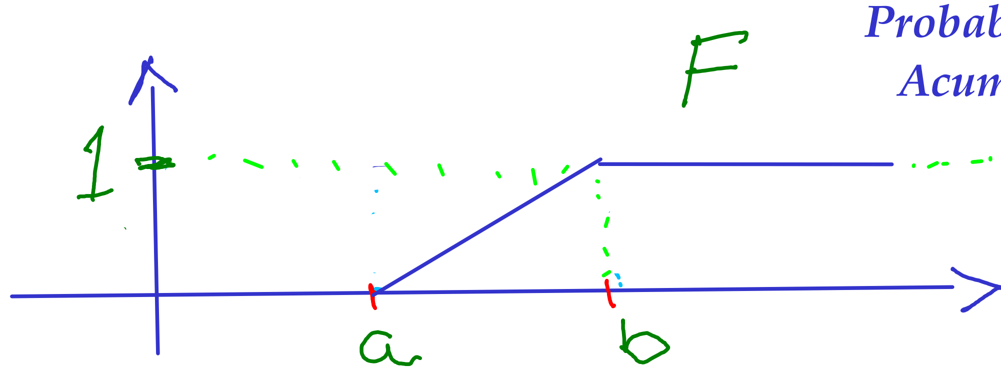
Definição: dizemos que X é uma v.a. com distribuição uniforme entre a e b, $a < b$, se sua função distribuição de probabilidade f for dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{se } x > b \end{cases}$$





Função Densidade de Probabilidade



Função de Probabilidade Acumulada

Exercício: use geometria elementar para mostrar que:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$$

Alguns resultados de Cálculo que vamos precisar:

1) Teorema Fundamental do Cálculo (na wikipedia há animações interessantes ilustrando esse resultado)

Se h é uma função continua definita em um intervalo [a , b] em R e H é outra função tal que

$\frac{dH(x)}{dx} =$ ***H'(x) = h(x) para todo x neste intervalo. Então***

notação usual para derivada de H(x) em x

$$H(x) - H(a) = \int_a^x h(s)\, ds = \Big[H(x) \Big]_a^x$$

notação

Exemplos (Verifique!):

1.1) $h(x) = x^n$ *e* $H(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

1.2) $h(x) = e^x$ $H(x) = e^x$

Obs: Este resultado indica que as operações de

derivada de uma função

integral de uma função

são "operações inversas":

"h é a derivada de H e H é a integral de h"

·

2) Integração por partes. Se u e v são funções contínuas cujas derivadas u′ e v′ são contínuas num intervalo [a , b] então

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Exercício: verifique e use a fórmula (u(x) v(x))′ = u′(x) v(x) + u(x) v′(x) para verificar este resultado.

Exercício: com u(x) = x e v(x) = e^{-x}*; calcule a integral do lado esquerdo:*

$$\int_a^b x e^{-x}\,dx$$

Além desses resultados, você tambem precisa saber derivar algumas funções simples (polinômios, por exemplo) e aplicar a Regra da cadeia ("derivar uma função de função")

Exercício: use esses resultados e encontre F, a função de probabilidade acumulada (agora sem usar geometria) para a v.a. uniforme X ~ U ([a, b]), cuja função densidade de probabilidade f é dada acima. Mostre também que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

As características principais de uma variável aleatória contínua são determinadas por sua função densidade de probabilidade f (ou, de forma equivalente, por sua função de probabilidade acumulada F).

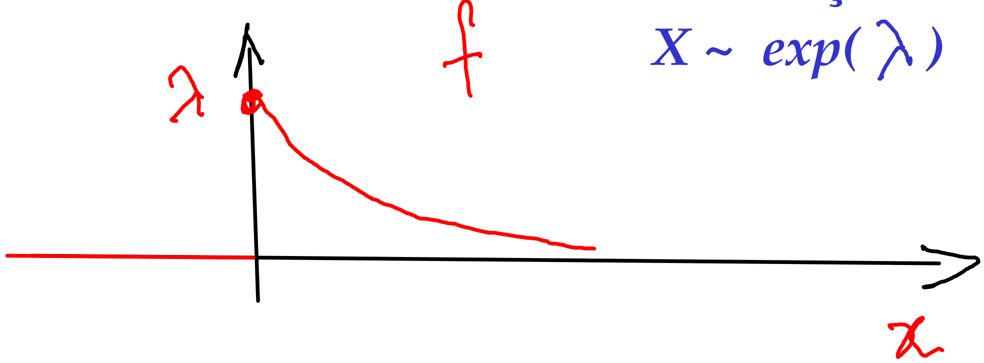
Duas variáveis aleatórias continuas bastante importantes, tanto do ponto de vista teórico como aplicado são as v.a. Exponencial e Normal.

Variável aleatória Exponencial tem f (função densidade de probabilidade) dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ é o parâmetro dessa v.a.
(Já vamos ver o seu significado)

Notação
$X \sim exp(\lambda)$



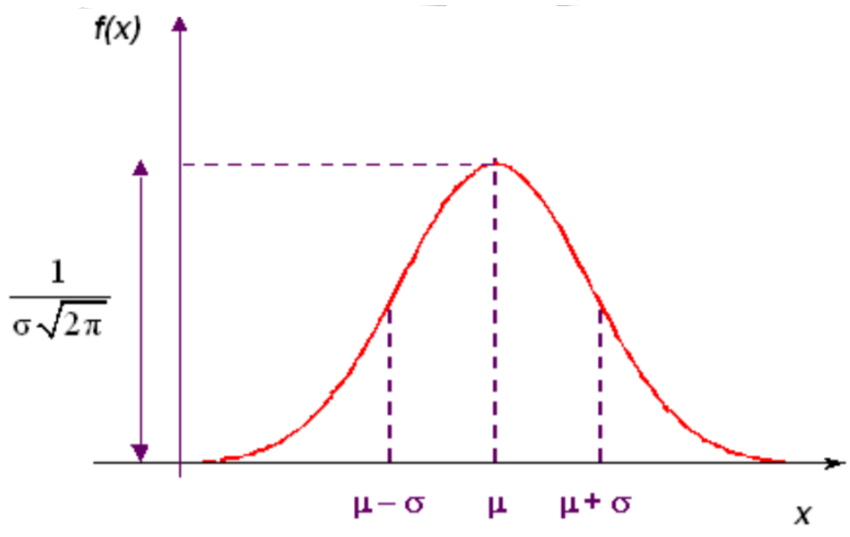
Variável aleatória Normal tem dois parâmetros:

$\mu \in \mathbb{R}$ *e* $\sigma > 0$

Sua f (função densidade de probabilidade) é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Notação: $X \sim N(\mu\,;\,\sigma^2)$



Note que f tem formato de um sino simétrico ao redor de μ *onde f atinge seu valor máximo.*

O parâmetro σ *determina "quão achatado é esse sino".*

Exercício: mostre que, com f definida acima

a) f (x) é simétrica em relação a μ *e tem máximo neste valor.*

b) a derivada segunda de f (f'') é igual a zero para x = $\mu \pm \sigma$

Definição: Valor esperado de uma variável aleatória contínua.

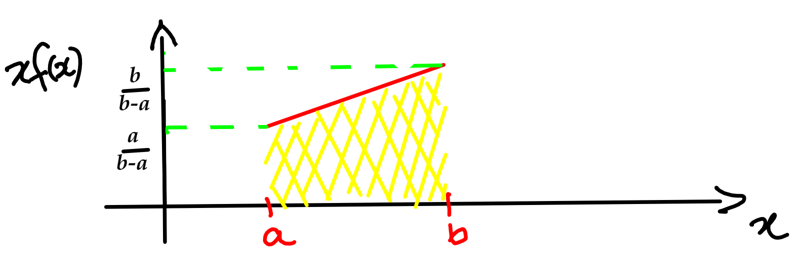
Seja X uma v.a. contínua com certa f (função densidade de probabilidade)

Definimos seu Valor Esperado, denotado por E(X), por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

Exemplo: X ~ U([a, b]).

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \quad \text{onde} \quad x f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



Exercício: Use geometria elementar (área do trapézio da figura acima) para determinar E(X).

Usando cálculo:

$$\boxed{E(X)} = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

$$= \boxed{\frac{b+a}{2}}$$

Teorema fundamental do cálculo (acima)

Valor esperado da Exponencial. Seja X ~ exp(λ)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \quad \text{onde} \quad x f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ \lambda x e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{E(X)} = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}\underbrace{\int_0^{\infty} s e^{-s}\,ds}_{=1} = \boxed{\frac{1}{\lambda}}$$

fazendo uma mudança de variável de integração $s = \lambda x$

veja o exemplo de integral por partes

Valor esperado da Normal. Seja X ~ N($\mu ; \sigma^2$)

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

onde $x f(x) = \dfrac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[(x-\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \mu e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[s e^{-\frac{s^2}{2}} + \mu e^{-\frac{s^2}{2}}\right]$$

se $s = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

Então

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-s^2/2}\,ds + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds$$

Obs: Verifique que "os extremos de integração" estão corretos após a mudança de variável de integração de x para s.

Vamos considerar cada um dos dois termos da expressão acima. Começamos pelo segundo termo. Se vocês não "foram enganados" até agora, temos que ter

$$\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \mu \qquad (\star)$$

pois $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

é a função densidade de probabilidade de uma v.a. Normal particularmente importante (Normal Padrão), cujos parâmetros são

$$\mu = 0 \quad e \quad \sigma = 1$$ ***(certo?)***

e "portanto temos que ter" a identidade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 .$$

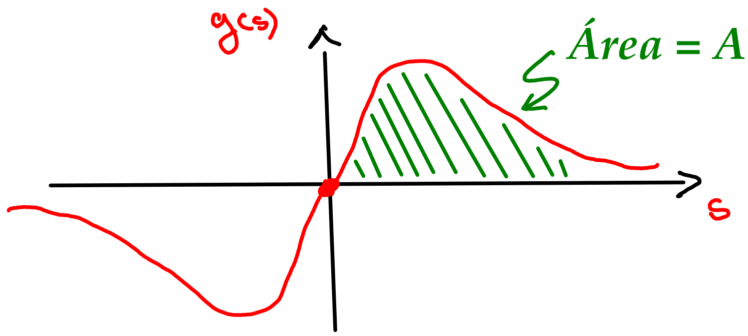
Claro que isso não prova $(\star)$*, pois não verificamos que a a expressão de f para a Normal satisfaz a necessária identidade acima.*

Não é difícil verificar que a integral da f da Normal é (como tem que ser) igual a 1. Uma demonstração simples envolve integrais em duas variáveis, que prefiro não apresentar agora. Esta distribuição foi definida por Carl Friedrich Gauss. Voces confiam nele, certo?

Agora consideremos o primeiro termo da expressão de E(X) da normal acima:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-s^2/2}\, ds$$

Estamos integrando a função $g(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s e^{-s^2/2}$



onde g(s) = - g(- s). Portanto

$$A = \int_0^{\infty} g(s)\,ds = -\int_{-\infty}^{0} g(s)\,ds$$

E "portanto"

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-s^2/2}\, ds = 0$$

Obs: Falta algo para esta ser "uma demonstração válida". O que?

Conlusão: Se X ~N (μ , σ^2), então

$$\boxed{EX = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-s^2/2}\, ds}_{=0} + \mu \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds}_{=1} = \mu}$$