MAP2110 - Notas de aula e exercícios

Geometria analítica

Saulo R. M. Barros

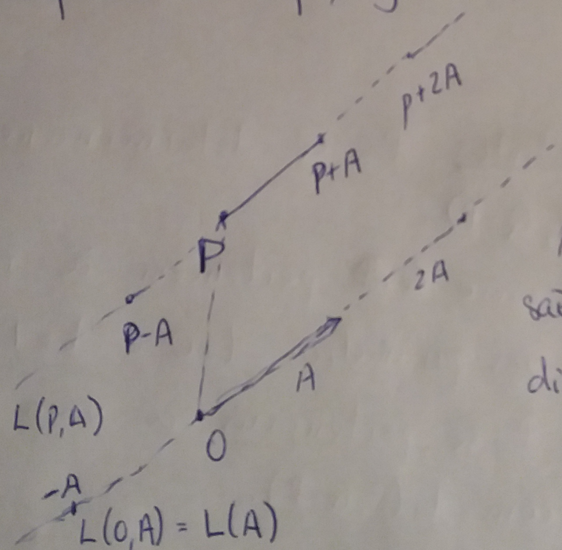
Departamento de Matemática Aplicada - IME-USP

Geometria Analítica no plano e no espaço

Retas e segmentos de Retas:

Definições: A um vetor em V_n associamos o ponto de coordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$. Definimos uma reta em V_n (ou 'linha') passando por um ponto P com direção dada por um vetor A, como o conjunto $L(P,A) = \{P + tA, \forall t \in \mathbb{R}\}$. Dizemos que um ponto Q está na reta se $Q \in L(P,A)$.

Obs: Uma reta do tipo $L(O,A)$ (passando pela origem) corresponde ao espaço gerado pelo vetor A.



As retas $L(P,A)$ e $L(O,A)$ são paralelas (pois têm mesma direção)

Algumas propriedades: Duas retas passando por um mesmo ponto P, $L(P,A)$ e $L(P,B)$ coincidem $\Longleftrightarrow$ A e B são paralelos, ou seja $A = \alpha B$ (com $\alpha \neq 0$).

Note que se $Q \in L(P,A)$, $Q = P + tA = P + t\alpha B = P + (t\alpha)B \in L(P,$ e vice-versa.

Ao descrevermos a reta $L(P,A)$ usamos P como referência. Caso $Q \in L(P,A)$ temos que $L(Q,A) = L(P,A)$.

(Note que $Q = P + \bar{t}A$. Se $R \in L(P,A)$ então $R = P + tA$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Logo $R = Q - \bar{t}A + tA = Q + (t - \bar{t})A \in L(Q,A)$ e vice-versa.)

Definimos duas retas como <u>paralelas</u> se têm mesma direção.

Duas retas paralelas ou não se interceptam ou coincidem, como mostra a observação acima.

<u>Consequência</u>: Se $Q \notin L(P,A)$ então existe uma única reta passando por Q paralela a $L(P,A)$ (que é a reta $L(Q,A)$).

<u>Teorema</u>: Dois pontos <u>distintos</u> P e Q determinam uma (única) reta, $L(P, Q-P)$.

<u>Dem</u>: Note que tanto P como Q pertencem à reta $L(P, Q-P)$ (correspondem aos parâmetros $t=0$ e $t=1$).

Mostremos agora que caso P e Q pertençam a uma mesma reta então esta coincide com $L(P, Q-P)$.

Suponha que esta reta seja $L(P,A)$ (já vimos que qualquer reta pode ser descrita a partir de um ponto contido nela).

Se $Q \in L(P,A)$ então $Q = P + tA$ para algum $t \neq 0$.

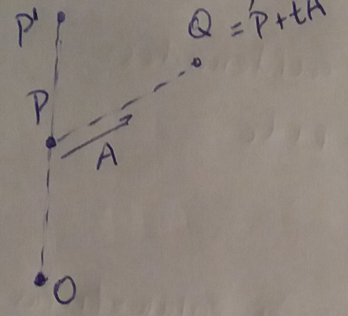
Logo, $A = \frac{1}{t}(Q-P)$. Assim A é paralelo a $(Q-P)$. Segue que

$$L(P,A) = L(P, Q-P).$$

Como consequência temos que $Q \in L(P,A)$ se e só se $(Q-P)$ é paralelo a A.

Note que A e $(Q-P)$ são linearmente dependentes.

Podemos ainda notar que dois vetores são L.D. se pertencem a uma mesma reta passando pela origem.

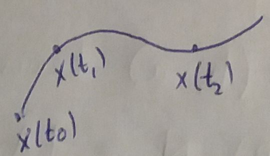


Funções cuja imagem são vetores:

Podemos definir funções $f: \mathbb{R} \to V_n$, que a cada número real associa um vetor (ou ponto) em V_n.

Em particular $X(t) = P + tA$ associa a cada t um ponto da reta $L(P,A)$.

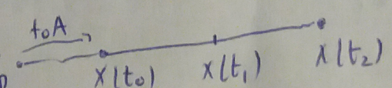
Este conceito de "funções vetoriais" é importante por proporcionar formas de descrever "linhas" ou "curvas" mais gerais que retas.

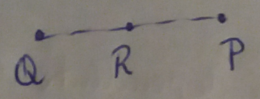


Note que em uma reta $X(t_1) = X(t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2$.

t é o parâmetro que descreve a reta. No caso mais geral teremos curvas parametrizadas.

Obs: Se $t_0 < t_1 < t_2$ então o ponto $X(t_1) = P + t_1 A$ de uma reta está entre $X(t_0)$ e $X(t_2)$.





Se R está entre P e Q, podemos escrever

$R = Q + t(P-Q)$ com t entre 0 e 1.

$R = tP + (1-t)Q$ (combinação convexa de P e Q)

Usando coordenadas:

Em $\mathbb{R}^3$ $\quad P = (p,q,r)$, $A = (a,b,c)$, $X(t) = (x,y,z)$

$L(P,A)$ pode ser descrita através das coordenadas:

$$x = p + ta, \quad y = q + tb, \quad z = r + tc$$

Em $\mathbb{R}^2$ Só temos as relações

$$x = p + ta, \quad y = q + tb$$ (equações paramétricas da reta).

temos que $t = \dfrac{x-p}{a} = \dfrac{y-q}{b}$

De onde derivamos a relação $y - q = \dfrac{b}{a}(x-p)$

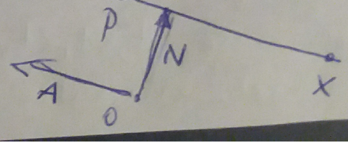
ou $y = q + \dfrac{b}{a}(x-p)$

Note que a reta passa por (p,q) e tem inclinação (coeficiente angular) b/a.

Podemos ainda usar o produto escalar para descrever a Reta: Definindo $N = (b,-a)$ temos que $N.A = 0$

e portanto $(X-P).N = tA.N = 0$

Assim $X.N = P.N$ A reta (em $\mathbb{R}^2$) é definida como o conjunto dos pontos (vetores) ortogonais a N, (que é o vetor normal à reta)



Teor: Considere a reta em $\mathbb{R}^2$, composto pelos pontos X tal que $X \cdot N = P \cdot N$ (onde P pertence à reta e N é um vetor ñ nul normal a ela).

Defina $d = \dfrac{|P \cdot N|}{\|N\|}$. Então $\|X\| \geq d$ e vale a igualdade se e só se X é a projeção de P na direção N.

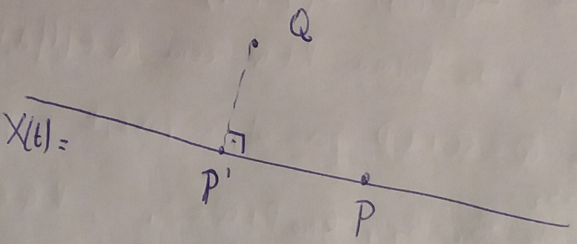
(ou seja, se $X = tN = \dfrac{P \cdot N}{N \cdot N} N$)

Dem: Como $X . N = P . N$

temos $|P . N| = |X . N| \underset{\uparrow \atop c.s.}{\leq} \|X\| \, \|N\|$

Segue que $\|X\| \geq \dfrac{|P . N|}{\|N\|}$ e vale a igualdade só se X e N forem paralelos.

Seja agora Q que não pertence à reta.



O ponto da reta mais próximo a Q é a projeção ortogonal de $(Q-P)$ na direção normal.

Note que $(X-Q) . N = (P-Q) . N$

Portanto $|(P-Q) . N| = |(X-Q) . N| \leq \|X-Q\| \, \|N\|$

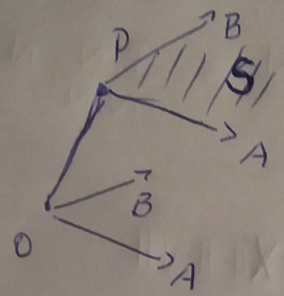
e $\|X-Q\| \geq \dfrac{|(P-Q) . N|}{\|N\|}$

Assim o ponto da reta mais próximo a Q é a projeção de $(P-Q)$ na reta ($P' - Q = (P-Q) . \dfrac{N}{\|N\|} N$)

Planos em V_n

De forma análoga à definição de reta, definimos um plano contendo um ponto P.

$$S = \{P + sA + tB,\ s,t \in \mathbb{R},\ \{A,B\}\ L.I.\}$$



O espaço gerado pelos vetores A e B é o plano passando pela origem $S = \{sA + tB\} = L(\{A,B\})$.

__Teorema:__ Dois planos $S_1 = \{P + sA + tB\}$ e $S_2 = \{P + sC + tD\}$ são iguais se e só se $L(\{A,B\}) = L(\{C,D\})$.

Todo ponto em S_1 é da forma $P + Q$ com $Q \in L(\{A,B\})$. Se $L(\{A,B\}) = L(\{C,D\})$ então $Q = sC + tD$ para algum par s,t e portanto $P + Q \in S_2$. Logo $S_1 = S_2$.

Por outro lado, se $S_1 = S_2$, como $P + Q \in S_1$, $\forall Q \in L(\{A,B\})$ temos que $L(\{A,B\}) \subset L(\{C,D\})$ pois $P + Q \in S_2$. Trocando S_1 por S_2 obtemos $L(\{C,D\}) \subset L(\{A,B\})$ e daí a igualdade.

__Teor:__ $S_1 = \{P + sA + tB\}$ e $S_2 = \{Q + sA + tB\}$ são iguais caso $Q \in S_1$ (ou $P \in S_2$). __Dem:__ se $Q \in S_1 \Rightarrow Q = P + sA + tB$.

__Assim__ todo elemento $R = P + s_1A + t_1B \in S_1$ é tq. $R = Q + (s_1 - s)A + (t_1 - t)B \in S_2$ e vice-versa.

__Definição:__ Dois planos são paralelos se $L(\{A,B\}) = L(\{C,D\})$.

__Teor:__ Se $Q \notin S_1 = \{P + sA + tB\}$ $\exists!$ plano $S_2 \parallel S_1$.

Teorema Sejam P, Q, R não colineares. Então eles definem um único plano, ou seja, há um único plano contendo P, Q, R.

Temos que $S = \{P + t(Q-P) + s(R-P)\}$ é o plano contendo P, Q, R. Note que $(Q-P)$ e $(R-P)$ são L.I. Caso contrário,

$$(Q-P) = \alpha (R-P)$$

e $Q = P + \alpha(R-P)$ com $Q \in L(P, R-P)$ contradizendo a hipótese.

Suponha que haja outro: $S_2 = \{P + \alpha A + \beta B\}$ contendo Q e R.

Então

$$R = P + \alpha_1 A + \beta_1 B \Rightarrow (R-P) = \alpha_1 A + \beta_1 B$$

$$Q = P + \alpha_2 A + \beta_2 B \Rightarrow (Q-P) = \alpha_2 A + \beta_2 B$$

Logo: $(R-P)$ e $(Q-P) \in L(\{A, B\})$

Combinando as duas equações acima, obtemos:

$$\alpha_2 (R-P) - \alpha_1 (Q-P) = (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) B$$

e

$$\beta_1 (Q-P) - \beta_2 (R-P) = (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) A.$$

Note que $\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 \neq 0$ (caso contrário $\alpha_2 (R-P) = \alpha_1 (Q-P)$, mas já vimos que $R-P$ e $Q-P$ são L.I.)

assim $B = \frac{1}{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}\left(\alpha_2(R-P) - \alpha_1(Q-P)\right)$ e $A = \frac{1}{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}\left(\beta_1(Q-P) - \beta_2(R-P)\right)$

mostrando que A e B $\in L(\{R-P, Q-P\})$.

Logo $L\{(A,B)\} = L(\{R-P, Q-P\})$ e portanto os planos são iguais.