Física Matemática I - 4302204

Prova Final

16/07/2020

1) Classifique as singularidades e calcule os resíduos das seguintes funções:

$$a)\, f(z) = \frac{e^{\pi z} - 1}{z(z^2+1)} \quad b)\, f(z) = \tan 2z \quad c)\, f(z) = \frac{\sinh z}{z^4} \quad d)\, f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

2) Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2π definida por $f(x) = \cos \alpha x$ para $-\pi < x < \pi$.
a) Mostre que a expansão de $f(x)$ em série de Fourier é dada por:

$$f(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \right)$$

b) Calcule a série que representa $\sin \alpha x$ para $-\pi < x < \pi$.

3) Calcule a transformada de Fourier das seguintes funções:

$$a)\;\; f(x) = e^{-ax^2}$$

para $a > 0$. Faça um gráfico de $f(x)$ e da transformada $F(k)$ discutindo a relação entre elas.

$$b)\;\; f(x) = \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 4}$$

Neste item faça a integral pelo método dos resíduos.

4) Em teoria quântica de campos, a interação entre dois férmions devida à troca de um bóson dá origem ao famoso potencial de Yukawa. A interação é dada por

$$F\left(\vec{k}\right) = \frac{\alpha}{\vec{k}^2 + m^2}\,,$$

sendo m a massa do bóson e α uma constante, e o potencial é definido por

$$V(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{\sqrt{2\pi}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, F\left(\vec{k}\right)\,,$$

sendo $r = |\vec{r}|$ a distância relativa entre os dois férmions. Obtenha a expressão para o potencial de Yukawa.
Obs: utilize "coordenadas" esféricas para a integral tripla e resolva a integral "radial" por resíduos, justificando a mudança dos extremos de integração de $[0, \infty]$ para $[-\infty, \infty]$.