FÍSICA III — AULAS DE 6 E 7 DE JULHO

CIRCUITOS ELÉTRICOS

PARA AS CRIANÇAS PEQUENAS, até quatro ou cinco anos, a eletricidade é feita de interruptores e tomadas. Mais tarde, elas aprendem que o interruptor serve para abrir ou fechar um circuito e que aparelhos elétricos, tais como uma batedeira, devem ser conectados a tomadas para funcionar. Quando uma batedeira está ligada a uma tomada, o interruptor permite fechar um circuito no interior do aparelho que faz o seu motor girar. O interruptor e a tomada são acessórios; em nosso dia-a-dia, a eletricidade se materializa nos circuitos elétricos de que tomadas, interruptores e outros elementos mais importantes fazem parte.

Nesta aula, vamos estudar alguns elementos de circuitos e ver como eles funcionam quando combinados em um circuito fechado. Em aulas anteriores, já discutimos dois elementos especialmente importantes: o capacitor e o resistor. Falta um terceiro, que discutiremos a seguir.

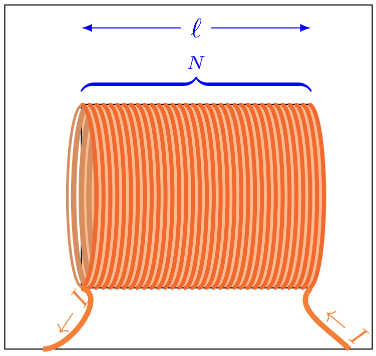

Figura 1: Indutor. Em consequência da lei de Lenz, o solenóide produz um campo magnético que se opõe a variações na corrente que percorre as espiras.

O indutor

Em sua versão mais simples, o indutor é constituído pelo solenóide, que estudamos na aula de 8 de junho. A figura 1 foi apresentada naquele dia, e vimos que a corrente elétrica I que circula pelas N espiras produz um campo magnético $\vec{B}$ no interior da bobina, paralelo ao seu eixo de simetria. Na ocasião, a partir da lei de Ampère, encontramos a seguinte expressão para o campo magnético:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}. \tag{1}$$

Se o raio das espiras for a, a área será πa^2, e o fluxo através de cada uma delas será

$$\Phi_1 = \mu_0 \frac{NI\pi a^2}{\ell}. \tag{2}$$

O fluxo através das N espiras do solenóide, portanto, será

$$\Phi_N = \mu_0 \frac{\pi N^2 I a^2}{\ell}. \tag{3}$$

Suponhamos, agora, que a corrente varie em função do tempo. Segundo a lei de Faraday, a variação do fluxo induzirá no solenóide uma força eletromotriz

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_N}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

ou, de acordo com a Eq. (4),

$$\mathcal{E} = -\mu_0 \frac{\pi N^2 a^2}{\ell} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{5}$$

A Eq. (5) mostra que a força eletromotriz é proporcional à derivada temporal da corrente. Para pôr em evidência essa proporcionalidade, define-se a *auto-indutância* L pela igualdade

$$\mathcal{E} = -L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{6}$$

Como a palavra "auto-indutância" é difícil de pronunciar, na prática L é chamada de *indutância*. A comparação entre as Eqs. (5) e (6) mostra que, para o solenóide,

$$L = \mu_0 \frac{\pi N^2 a^2}{\ell}. \qquad (7)$$

Da Eq. (6) podemos ver que a indutância tem dimensão

$$[L] = \frac{[V][T]}{[I]}, \qquad (8)$$

onde $[V]$ é a dimensão do potencial e $[T]$, a do tempo.

Uma vez que $[V]/[I]$ é a dimensão de resistência, a Eq. (8) mostra que a unidade de indutância, no Sistema Internacional, é Ω s. Essa unidade recebe o nome de Henry, com símbolo H.

O solenóide define um elemento de circuito conhecido como *indutor*, que é caracterizado pela Eq. (6). O sinal negativo, decorrência da lei de Lenz, indica que a diferença de potencial entre um extremo e outro do indutor tem sentido oposto ao da corrente quando I cresce e sentido que acompanha a corrente quando I decresce.

Em circuitos elétricos, o símbolo na figura 2 representa os indutores. Na figura, a corrente avança no sentido indicado pela seta. Na hipótese de a corrente estar crescendo em função do tempo, o potencial no polo superior do indutor será maior do que o potencial no polo inferior, como indicam os sinais $+$ e $-$.

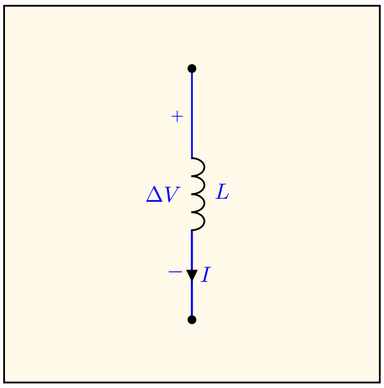

Figura 2: Símbolo que representa o indutor em circuitos elétricos. A diferença de potencial indicada é compatível com a força eletromotriz gerada por uma corrente crescente, $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t > 0$.

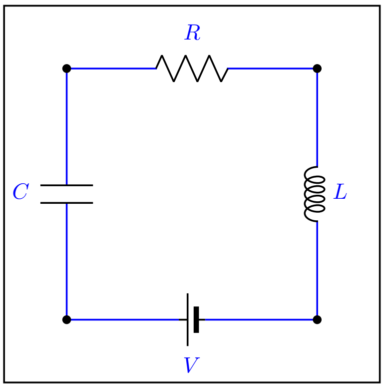

Figura 3: Circuito elétrico constituído por uma bateria e três elementos passivos.

Relação entre diferença de potencial e corrente

A figura 3 mostra um circuito simples com quatro elementos: uma bateria, um capacitor, um resistor e um indutor. Os três últimos são chamados de *passivos*, porque não geram energia, embora possam armazernar ou dissipar energia. Cada um dos elementos tem dois polos. Em cada um dos passivos, a diferença de potencial entre os polos está relacionada com a corrente através do elemento. No capacitor, a diferença de potencial é proporcional à carga acumulada nas placas, isto é, à integral da corrente. No resistor, a diferença de potencial é proporcional à própria corrente. E no indutor, como vimos na última seção, a diferença de potencial é proporcional à derivada temporal da corrente. A coluna do meio na tabela 1 coleciona as expressões matemáticas para a diferença de potencial.

Dispositivo	Diferença de potencial	Energia
Capacitor	$\Delta V = \frac{Q}{C}$	$\frac{Q^2}{2C}$
Resistor	$\Delta V = RI$	$RI^2\Delta t$
Indutor	$\Delta V = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$	$L\frac{I^2}{2}$

Tabela 1: Relação entre corrente e a diferença de potencial nos elementos passivos de circuito. Tanto no capacitor como no resistor e no indutor, ΔV é a diferença entre o potencial do polo onde a corrente entra e o do polo onde ela sai do dispositivo. A coluna da direita lista as energias armazenadas no capacitor e no indutor e a energia dissipada no resistor num intervalo de tempo Δt.

Diferença de potencial no indutor O sinal da diferença de potencial entre os polos pode ser facilmente identificada, em cada caso. A figura 2 já nos mostrou como encontrá-la numa situação particular, mas vale a pena explicar como se explora o exemplo ali retratado no caso geral.

Dado um elemento, veremos quando discutirmos as leis de Kirchoff, mais abaixo, que podemos sempre escolher o sentido da corrente que o atravessa. Feita essa escolha, podemos sempre supor que a corrente que atravessa um indutor é crescente, isto é, que $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ terá o sentido de I. No caso, como I corre para baixo, $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ é também no sentido descendente. A lei de Lenz, então, significa que o indutor operará como uma bateria que se opõe ao incremento na corrente, isto é, tem polo superior positivo e polo inferior negativo. Em suma, o potencial do polo superior do indutor na figura 2 é positivo e o inferior, negativo. Significa que o potencial diminui quando se avança na mão da corrente.

Essas suposições podem ser corretas ou não; no final das contas, se o sinal de I for negativo, concluiremos que ela é no sentido oposto ao que supusemos. Da mesma forma, a álgebra nos dirá se $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ é negativa ou positiva.

Diferença de potencial no resistor Para o resistor retratado na figura 4, para definir o polo que tem potencial mais alto basta escolher um sentido para a corrente. Isso porque, no resistor, a corrente sempre flui do potencial mais alto para o mais baixo. Na figura, o sentido escolhido foi, de novo, o descendente. O potencial, portanto, assume valor mais alto no polo de cima e mais baixo no polo inferior.

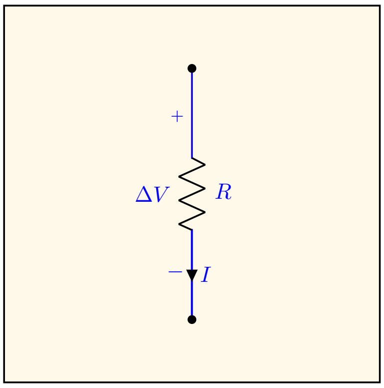

Figura 4: Resistor. A corrente é desceendente, o que indica que o potencial no polo superior é mais alto do que no polo inferior.

Diferença de potencial no capacitor Vejamos, por fim, o capacitor da figura 5. Nos capacitores, assim como nos indutores, a diferença de potencial não é proporcional à corrente, mas sim à carga acumulada nas placas do dispositivo. Para determinar qual das placas tem potencial mais elevado, precisamos supor que a carga numa delas é positiva e que a carga na outra é negativa.

O procedimento prático é supor que a corrente entra na placa positiva e sai da negativa. Como estamos trabalhando com portadores positivos, por convenção, essa suposição parece natural. No exemplo da figura, a placa de cima será positiva e a de baixo, negativa. O potencial da placa de cima será mais alto do que o potencial da placa de baixo.

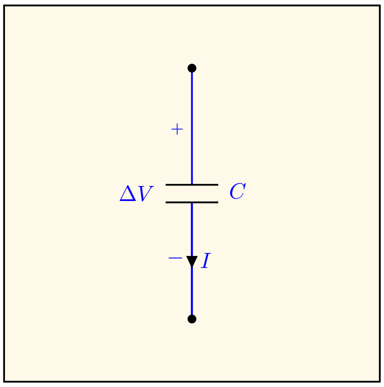

Figura 5: Capacitor. A corrente flui de cima para baixo, e a carga na placa superior é positiva. Nessas condições, assim como nas figuras 4 e 5, o potencial é mais elevado no polo superior.

Em resumo, para determinar a diferença de potencial em qualquer elemento passivo, basta recorrer às expressões na tabela 1. Para identificar o terminal do elemento que tem potencial mais alto, é só lembrar que a corrente flui do potencial mais alto para o mais baixo.

As fontes de tensão

NA FIGURA 3, a corrente é alimentada pela bateria no ramo inferior. Se o circuito tiver sido fechado no momento representado pela ilustração, com o capacitor descarregado, a corrente começará a circular. Aos poucos, porém, o capacitor se carregará. A diferença de potencial entre as placas crescerá. E, uma vez que a diferença de potencial trabalha contra a bateria, a corrente, aos poucos, diminuirá. Nunca chegará a zero, mas será insignificante depois de algum tempo.

Se quisermos manter uma corrente no circuito, precisaremos substituir a bateria por um gerador de tensão alternada, como na figura 6. Já discutimos o funcionamento do gerador, quando descrevemos a força eletromotriz gerada por uma espira que gira num campo magnético uniforme, no dia 22 de junho. A força eletromotriz oscila com frequência ω e amplitude $\mathcal{E}_0$.

A cada ciclo da oscilação no gerador de tensão alternada, a carga em cada placa do capacitor cresce, decresce, troca de sinal, alcança um valor mínimo e volta crescer até voltar a ser zero. A corrente no circuito acompanha as oscilações da força eletromotriz e, assim, se mantém indefinidamente. Neste capítulo, estaremos principalmente interessados na bateria, mas também discutiremos, superficialmente, o comportamento do gerador de tensão alternada.

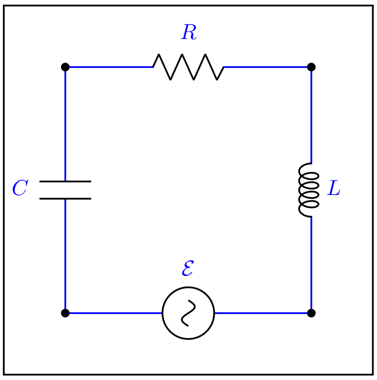

Figura 6: A bateria da figura 3 foi substituída por um gerador de tensão alternada. A força eletromotriz do gerador troca de sinal periodicamente e força uma corrente a circular por tempo indefinido.

Bateria Toda bateria tem dois polos, um positivo e outro negativo. Em todas elas — uma pilha palito ou uma bateria de automóvel, por exemplo — cada um dos polos está assinalado. Nos circuitos, como ilustrado pela figura 3, a bateria é representada por um símbolo que define claramente os polos positivo, representado pelo traço maior, e negativo.

Por isso, não é necessário fazer suposições sobre a polaridade da bateria. Como já vimos, quando se calcula a corrente num circuito, escolhe-se, livremente, o sentido de I para determinar a diferença de potencial em cada elemento passivo: o potencial sempre cai quando se atravessa um elemento passivo no sentido da corrente. Já no caso das baterias, a diferença de potencial é predefinida, porque vem indicada no desenho.

No circuito da figura 3, podemos tanto supor que a corrente circula no sentido horário como no antihorário. Se supusermos que circula no sentido horário, encontraremos, no final da análise, um resultado positivo, o que indica que nossa suposição estava correta. Se, ao contrário, escolhermos o sentido antihorário, acabaremos com um sinal negativo, a indicar que escolhemos o sentido errado.

A corrente, portanto, circula no sentido horário. Significa que, ao atravessar a bateria, a corrente vai do polo negativo para o positivo. É o oposto da regra que aprendemos para dispositivos passivos. E isso faz sentido: em pelo menos um dos elementos do circuito, o potencial precisa crescer quando andamos no sentido da corrente; caso contrário, quando déssemos uma volta no circuito, o potencial diminuiria a cada elemento atravessado e não voltaria ao valor inicial no final da volta — um absurdo.

Gerador de tensão alternada Uma vez que a força eletromotriz $\mathcal{E}$ do gerador de tensão troca de sinal duas vezes a cada ciclo, o símbolo que o representa não mostra polaridades. É conveniente escolher um dos polos como positivo e considerar que estamos numa fase do ciclo em que isso, de fato, aconteça. No circuito da figura 6, por exemplo, suporíamos que o potencial no polo direito do gerador é positivo e que o potencial no polo esquerdo é negativo. Na prática, isso significa que sincronizamos o relógio de forma que o tempo zero ocorresse num instante em que o potencial produzido pela força eletromotriz $\mathcal{E}(t=0)$ seja positivo à direita e negativo à esquerda do gerador. A menos que há outra definição, a diferença de potencial entre os polos de um gerador como o da figura 6 é da forma

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t), \tag{9}$$

onde $\mathcal{E}_0$ e ω são constantes conhecidas.

A potência cedida a um dispositivo

Cada vez que uma carga infinitesimal $\mathrm{d}q$ é transportada de um ponto onde o potencial é V para outro onde o potencial é $V + \Delta V$, ela ganha uma energia $\mathrm{d}U = \mathrm{d}q\,\Delta V$. A potência $P = \mathrm{d}U/\mathrm{d}t$ associada é

$$P = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\Delta V \tag{10}$$

e, como $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ é a corrente, concluímos que

$$P = I\Delta V. \tag{11}$$

A Eq. (11) descreve a potência trocada entre a corrente e um elemento de circuito que ela atravessa. O potencial elétrostático dá energia aos portadores da corrente. Ao atravessar um capacitor, resistor ou indutor e passar de um potencial mais alto para outro mais baixo, os portadores perdem energia. Se, ao contrário, a corrente fluir de um potencial mais baixo para outro mais alto, os portadores ganharão energia.

Nos resistores, o fluxo da corrente vai sempre do potencial mais alto para o potencial mais baixo. Há, portanto, perda de energia. A energia transferida é transformada em calor, um fenômeno conhecido como *efeito Joule*. Se substituirmos no lado direito da Eq. (11) a expressão da lei de Ohm na tabela 1, veremos que

$$P = RI^2. \tag{12}$$

Se, por exemplo, uma corrente de $1\,\mathrm{A}$ atravessar um resistor de $10\,\Omega$, a potência dissipada na forma de calor será $P = 10\,\mathrm{W}$. Se alguém tocar o resistor nessas condições, perceberá que ele ficou quente.

Frequentemente, em lugar de saber a corrente, conhecemos a diferença de potencial entre os polos do resistor. Se você acender uma lâmpada incandescente, por exemplo, saberá que a diferença de potencial é a fornecida pela rede elétrica, tipicamente $\Delta V = 127\,\mathrm{V}$. Para tratar desses casos, é conveniente recorrer outra vez à lei de Ohm para substituir I, no lado direito da Eq. (12), por $\Delta V/R$. O resultado é

$$P = \frac{(\Delta V)^2}{R}. \tag{13}$$

A potência, agora, é inversamente proporcional à resistência, porque, dada uma diferença de potencial fixa, quanto menor for a resistência mais corrente passará e, portanto, mais intenso será o efeito Joule. Por isso, como todos sabemos, não se deve ligar por um fio de cobre os dois polos de uma pilha: como a resistência do fio é muito baixa, a potência na Eq. (13) será muito alta. Muito calor será gerado, às custas da energia armazenada na bateria, e a bateria se esgotará em prazo de minutos. Dizemos que a ligação criou um *curto-circuito*, isto é, um circuito elétrico com baixíssima resistência.

Se, por acidente, um fio positivo na instalação elétrica de uma casa tocar num fio negativo e provocar um curto-circuito, o calor gerado será grande a ponto de poder começar um incêndio. Para evitar que isso aconteca, as instalações elétricas dispõem de *disjuntores*, dispositivos que desligam automaticamente o fornecimento de energia quando a corrente excede um certo limite, 50 A, por exemplo.

Passamos, a seguir, para os capacitores. A potência é, de novo, fornecida pela Eq. (11). Como a corrente é $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, convém emprestar da tabela 1 a expressão para a diferença de potencial no capacitor e reescrever a Eq. (11) na forma equivalente

$$P = \frac{Q}{C}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}. \tag{14}$$

Podemos agora integrar os dois lados em relação ao tempo desde um instante em que a carga era zero até o momento em que ela alcança o valor Q:

$$U = \int_0^t P\ \mathrm{d}t = \int_0^t \frac{Q(t')}{C}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t'}\ \mathrm{d}t'. \tag{15}$$

Aqui, como de costume, chamamos de t' a variável de integração, para não confundir com o instante final t. Podemos agora notar que $\mathrm{d}Q(t')/\mathrm{d}t'\ \mathrm{d}t' = \mathrm{d}Q$ para mudar a variável de integração e efetuar a integral. Resulta que

$$U = \frac{Q^2}{2C} \qquad \text{(capacitor)}. \tag{16}$$

Já encontramos essa expressão quando estudamos o capacitor. Aqui, vale a pena entender de onde provém essa energia. Nós acabamos de discutir um processo em que o capacitor estava, inicialmente, descarregado e foi carregado pela corrente I. Nessas condições a carga Q é positiva, e um portador positivo que atravessa o capacitor passa de um potencial mais alto para outro mais baixo; perde, portanto, energia.

No resistor, essa energia se transforma em calor, mas aqui ela serve para carregar o capacitor. Se, mais tarde, o capacitor se descarregar, ele devolverá a energia à corrente elétrica.

O indutor também pode armazenar energia. De acordo com a tabela 1, a diferença de potencial é $L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. Suponhamos que a corrente I era nula no instante inicial $t = 0$. A potência consumida pelos portadores que atravessam o indutor é dada pela Eq. (11):

$$P = IL\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{17}$$

Podemos, como na Eq. (15), integrar os dois lados da Eq. (17) em relação ao tempo, para calcular a energia consumida pelos portadores:

$$U = \int_0^t IL\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t'\,. \tag{18}$$

A identidade $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t'\ \mathrm{d}t' \equiv \mathrm{d}I$ permite mudar a variável de integração, efetuar a integral e encontrar a energia

$$U = L\frac{I^2}{2} \qquad \text{(indutor)}. \tag{19}$$

Essa é a energia que os portadores perderam ao atravessar o indutor enquando a corrente crescia. Essa energia foi integralmente transferida para o indutor e permanecerá nele até a corrente mudar. Se a corrente diminuir, o indutor devolverá parte de U para a corrente; se I crescer, mais energia será transferida para o indutor.

As fontes de tensão fornecem potência que acaba sendo dissipada nos resistores. A potência, tanto para a bateria como o gerador de tensão alternada, é dada pela Eq. (11). Para uma bateria que fornece tensão V,

$$P = VI \qquad \text{(bateria)}. \tag{20}$$

Como já explicado, em condições normais a corrente flui do polo negativo para o positivo da bateria. Significa que os portadores ganham energia ao atravessar a fonte de tensão; a bateria, ao contrário, perde energia.

Para um gerador de tensão alternada

$$P(t) = \mathcal{E}(t)I(t). \tag{21}$$

Como veremos ao estudar circuitos de corrente alternada, a corrente $I(t)$ nem sempre está em fase com a força eletromotriz $\mathcal{E}(t)$. Esta última pode ser dada pela Eq. (9) enquanto a corrente é dada pela função seno, por exemplo. Em circuitos de corrente alternada a potência tende a oscilar entre valores positivos e negativos. Na média sobre uma oscilação completa, o gerador fornece energia, que é dissipada nos resistores do circuito.

Leis de Kirchoff

DADO UM CIRCUITO ELÉTRICO, em geral estamos interessados em calcular a corrente ou as correntes que circulam por ele. Para isso são muito úteis duas relações derivadas por Kirchoff no século XIX e que receberam seu nome. As duas são consequências simples de noções que já conhecemos.

Lei das malhas

A primeira relação encontra aplicação em qualquer análise de circuito. Ela é obtida por meio de uma construção que se beneficia da

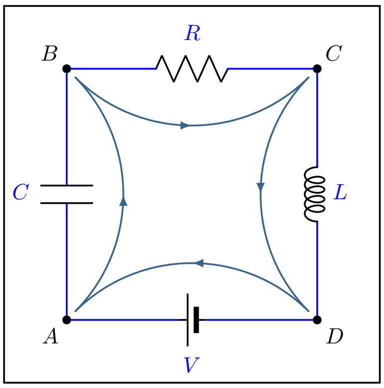

Figura 7: Construção geométrica que fundamenta a lei de Kirchoff.

lei de Faraday. A figura 7 mostra um circuito constituído por uma única *malha*, isto é, um caminho fechado que corre ao longo de fios e elementos do circuito que nos interessa. Um circuito complexo pode acomodar numerosos caminhos desse tipo, mas como o procedimento que vamos seguir se aplica a qualquer caminho fechado, é suficiente considerar uma como exemplo.

Dada uma malha, definimos um percurso como o representado pelas linhas curvas na figura. A linha passa pelos dois terminais de cada dispositivo na malha, mas circunda os elementos, de forma que nenhuma parte deles esteja em seu interior. Podemos, dessa maneira, garantir que o fluxo magnético através do circuito seja nulo. A lei de Faraday então garante que

$$\int_{\mathcal{M}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0. \tag{22}$$

A integral no lado esquerdo da Eq. (22) é a soma das diferenças de potencial em todos os elemento da malha. Podemos concluir que

$$\sum_{m=1}^{M} \Delta V_j \ = 0, \tag{23}$$

onde a soma é sobre os M dispositivos que compõem a malha.

Na figura 7, por exemplo, a soma percorre os quatro elementos: a diferença de potencial ΔV_{AB} entre os terminais do capacitor; a diferença de potencial ΔV_{BC} entre os terminais do resistor; a diferença de potencial ΔV_{CD} entre os terminais do indutor; e a diferença de potencial ΔV_{DA} entre os terminais da bateria. A Eq. (23) é a lei das malhas, de Kirchoff.

Lei dos nós

A segunda lei, conhecida como *lei dos nós*, se torna importante quando o circuito elétrico tem mais de uma malha. Um exemplo aparece na figura 8. Podemos identificar três malhas no circuito esquematizado: a malha A, formada pelos segmentos verticais da esquerda e do meio e pelos trechos horizontais que os ligam; a malha B formada pelos segmentos verticais da direita e do meio e pelos trechos horizontais que os ligam; e a malha C, formada pelos segmentos verticais da esquerda e da direita e pelos trechos horizontais que os unem.

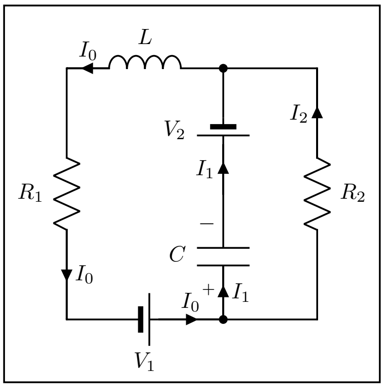

Figura 8: Circuito elétrico com três malhas. A análise requer atenção à lei dos nós.

A malha C pode ser desconsiderada, porque ela é uma combinação das malhas A e B. O segmento vertical do meio pertence tanto à malha A como à malha B. Quando há uma superposição como essa, e um trecho faz parte de duas malhas, há necessariamente um ponto onde as malhas se juntam e outro ponto onde elas se separam. Esses pontos são chamados de *nós*. Na figura 8, os dois nós são assinalados pelos pequenos círculos negros.

Em cada ramo do circuito, há uma corrente. Na figura, por exemplo, no ramo esquerdo, que pertence somente à malha A, a corrente é I_0, no ramo direito a corrente é I_2 e no ramo do meio, que pertence às duas malhas, a corrente é I_1. A lei dos nós afirma que a soma das correntes em cada nó é zero:

$$\sum_{n=1}^{N} I_n = 0, \tag{24}$$

onde N é o número de ramos que se encontram no nó, e as correntes têm sinais: positivo para as que entram e negativo para as que saem. Uma maneira alternativa de enunciar a lei dos nós é desconsiderar os sinais das correntes e dizer que a soma das que entram é igual à soma das que saem.

Na figura, tanto o nó superior como o inferior respeitam a igualdade $I_0 = I_1 + I_2$. Como esse exemplo mostra, não é necessário considerar todos os nós de um circuito. A equação derivada de um deles é, necessariamente, combinação linear das equações derivadas dos demais.

A lei dos nós decorre da equação da continuidade. Como o nó é um encontro de condutores, é impossível haver acúmulo de cargas nele, ou deficiência de cargas. Qualquer acúmulo geraria um campo elétrico no interior dos condutores; como vimos ao estudar a condutividade em metais, um acúmulo dessa natureza é eliminado pelo próprio campo elétrico numa escala de tempo da ordem de 1×10^{-18} s. Significa que a carga trazida pelas correntes que entram deve ser igual à carga levada pelas que saem, o que equivale à Eq. (24).

Circuito RL

A figura 9 mostra um circuito simples, com uma única malha, que compreende uma bateria, um resistor e um indutor. Montagens desse tipo são conhecidos como *circuitos RL*. A chave que aparece no desenho será fechada no instante $t = 0$. Nesse momento, a corrente será zero. Queremos encontrar a corrente em função do tempo.

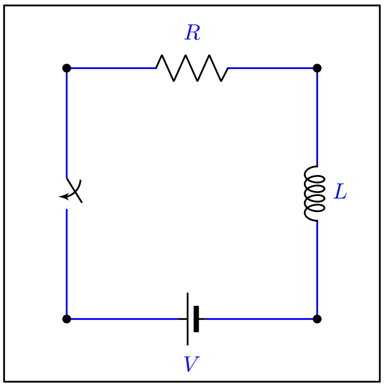

Figura 9: Circuito RL.

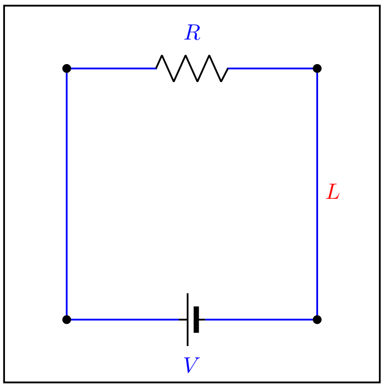

Figura 10: O circuito da figura 9 no regime estacionário, isto é, depois que a corrente deixou de variar com o tempo. A diferença de potencial entre os terminais do indutor L se tornou nula, e o indutor passou a se comportar como se fosse um fio condutor.

Escala de tempo

Fisicamente, esperamos que, depois de algum tempo, o resistor vá estabilizar a corrente, isto é, fazer com que ela deixe de variar com o tempo. Dizemos que a corrente entrou no *regime estacionário* e chamamos a corrente nesse ponto de I_e. Como, por definição, $\mathrm{d}I_e/\mathrm{d}t = 0$, a tabela 1 indica que a diferença de potencial entre os polos do indutor será zero. No regime estacionário, o indutor se comportará como se fosse o fio condutor no lado direito da figura 10. Restam a bateria e o resistor, e a corrente estacionária deve obedecer a lei de Ohm, $I_e = V/R$.

Depois de algum tempo, portanto, a corrente deve ser V/R. Uma das perguntas importantes é quanto tempo ela leva para subir de zero até V/R. Podemos analisar matematicamente o circuito e encontrar a resposta exata, mas é mais rápido e instrutivo identificar a escala de tempo em que a corrente varia.

Para encontrar a escala de tempo, basta analisar as dimensões das grandezas envolvidas. Denotando por $[G]$ a dimensão de uma grandeza G, vemos da tabela 1 que

$$[\Delta V] = [R][I] \tag{25}$$

e que

$$[\Delta V] = \frac{[L][I]}{[T]}, \tag{26}$$

onde $[T]$ é a dimensão do tempo.

Se dividirmos a Eq. (26) pela Eq. (25), veremos então que

$$\frac{[L]}{[R]} = [T]. \tag{27}$$

A razão $\tau = L/R$ tem, portanto, dimensão de tempo. Podemos esperar que a corrente no circuito da figura 9 suba de zero a V/R em tempo da ordem de τ. Mais precisamente, podemos esperar que a corrente seja uma função de t/τ: $I = f(t/\tau)$. Sabemos também que a função f deve chegar a V/R para tempos grandes. Com base em considerações simples, chegamos assim a uma descrição razoável do comportamento da corrente e poderíamos até arriscar um gráfico aproximado da I em função de t. Em lugar disso, porém, vamos analisar matematicamente nosso circuito RL.

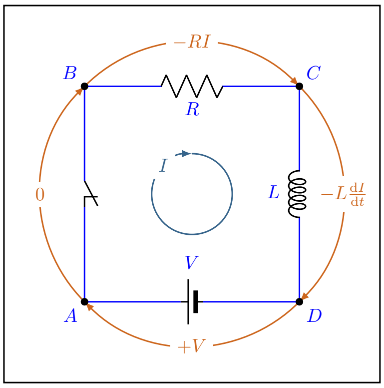

Figura 11: Diferenças de potencial no circuito da figura 9, após a chave ser fechada.

Equação diferencial

Nosso circuito RL possui uma só malha. Podemos aplicar a ela a lei de Kirchoff. Na figura 11, podemos dar a volta no circuito a partir do ponto A. Como indicado, escolhemos, arbitrariamente, o sentido horário para a corrente. É conveniente caminhar ao longo do circuito no mesmo sentido. Assim, como mostram as anotações sobre a circunferência vermelha, as diferenças de potencial são negativas nos elementos passivos, R e L, e positiva na bateria. Tudo somado, temos que

$$-RI - L\frac{dI}{dt} + V = 0, \tag{28}$$

equação diferencial que preferimos escrever na forma padrão

No formato padrão das equações diferenciais os termos proporcionais à variável dependente (I, no caso) e a suas derivadas ficam à esquerda, e os termos independentes dela (V, no caso) ficam à direita. No lado esquerdo, aparece primeiro a parcela com a derivada de ordem mais alta (LdI/dt, no caso) e em seguida as de ordem progressivamente mais baixa até a parcela proporcional à variável dependente (RI, no caso).

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V. \tag{29}$$

A Eq. (29) é uma equação diferencial de primeira ordem, ordinária, linear e não-homogênea. Como é de primeira ordem, ela somente necessita de uma condição inicial. A condição inicial é dada pela corrente no instante em que a chave da figura 9 foi fechada:

$$I(0) = 0. \tag{30}$$

Dada a condição inicial, dispomos de tudo o que é necessário para resolver a Eq. (30).

Decomposição em dois termos

Para encontrar uma solução que satisfaça à condição inicial (30), precisamos primeiro encontrar a solução geral I_α da Eq. (29). Como veremos, a solução geral depende de uma constante α, que poderá ser ajustada para satisfazer à condição inicial.

É prático escrever a solução geral como soma de duas correntes:

$$I_\alpha = I_p + I_\alpha^0. \tag{31}$$

Aqui, I_p é uma solução qualquer da Eq. (29); infelizmente, é difícil encontrar, diretamente uma solução particular que satisfaça à condição inicial. Como veremos logo adiante, será fácil encontrar uma solução se abrirmos mão da exigência de satisfazer à condição inicial.

A corrente I_α^0 no lado direito da Eq. (31) é a solução geral da equação homogênea associada à Eq. (31), isto é, a solução geral da equação com $V = 0$:

$$L\frac{\mathrm{d}I^0}{\mathrm{d}t} + RI^0 = 0. \tag{32}$$

Denotamos a solução geral da Eq. (32) por I_α^0 porque, assim como I_α, ela será determinada a menos de uma constante α, que posteriormente será fixada.

Para mostrar que o lado direito da Eq. (31) é solução da Eq. (29), basta substituir I por $I_p + I_\alpha^0$ na equação diferencial. Resulta que

$$L\frac{\mathrm{d}I_p}{\mathrm{d}t} + RI_p + L\frac{\mathrm{d}I_\alpha^0}{\mathrm{d}t} + RI_\alpha^0 = V. \tag{33}$$

Uma vez que a corrente I_α^0 satisfaz à Eq. (32), os termos verdes, à esquerda, somam zero. E, dado que a corrente I_s, por definição, satisfaz à equação

$$L\frac{\mathrm{d}I_p}{\mathrm{d}t} + RI_p = V, \tag{34}$$

os termos vermelhos somam V. Isso mostra que a Eq. (33) é identicamente satisfeita.

Assim, como queríamos demonstrar, a corrente I_α na Eq. (31) é solução da Eq. (29). Como ela depende de uma constante α, a solução poderá sempre ser ajustada para satisfazer à condição inicial.

Solução particular da equação não-homogênea

A Eq. (31) decompõe nosso trabalho em duas partes. É vantagem, porque cada uma das partes é mais simples do que resolver a Eq. (29) diretamente. Em particular, já conhecemos uma solução da equação não-homogênea: a corrente I_e no regime estacionário. Podemos, portanto, escolher

$$I_p = I_e \equiv \frac{V}{R}. \tag{35}$$

Solução geral da equação homogênea

Encontrada a corrente estacionária, que é solução da Eq. (29), precisamos agora da solução geral da equação homogênea (32). Como se trata de equação de primeira ordem, podemos resolvê-la diretamente. Isolados os termos que dependem da corrente no lado esquerdo e os que dependem do tempo no lado direito, encontramos a expressão

$$L\frac{\mathrm{d}I^0}{I^0} = -R\ \mathrm{d}t\,. \tag{36}$$

Integramos em seguida os dois lados, para obter uma igualdade que relaciona a corrente I^0 com o tempo:

$$L\log I^0 = c - Rt, \tag{37}$$

onde c é a constante de integração.

É conveniente exponenciar os dois lados da Eq. (37), para explicitar a corrente:

$$I_\alpha^0 = \alpha\exp\Big(-\frac{R}{L}t\Big), \tag{38}$$

onde $\alpha = \exp(c)$; trocamos uma constante desconhecida por outra.

Solução da equação não-homogênea

O próximo passo é voltar à Eq. (31) e substituir I_p pelo lado direito da Eq. (35) e I_α^0 pelo lado direito da Eq. (31). Chegamos assim à solução geral da Eq. (34):

$$I_\alpha(t) = \frac{V}{R} + \alpha\exp\Big(-\frac{R}{L}t\Big). \tag{39}$$

Essa expressão para a corrente é parametrizada pela constante α. Siginifica que encontramos uma infinidade de soluções para a equação diferencial, das quais apenas uma satisfaz à condição inicial.

Uma vez que a corrente I_α^0 na Eq. (38) é também parametrizada por α, pode parecer mais fácil impor a condição inicial na Eq. (38). Isso, porém, seria incorreto, porque nada liga I_α^0 à condição inicial. De fato, é fácil ver que, se I_α^0 satisfizesse a condição inicial, I_α não poderia satisfazê-la.

Para determinar a solução desejada, temos apenas de considerar a Eq. (39) no instante $t = 0$. Encontramos então que

$$0 = \frac{V}{R} + \alpha, \tag{40}$$

igualdade que fixa o parâmetro α:

$$\alpha = -\frac{V}{R}. \tag{41}$$

A solução da equação diferencial (34) que satisfaz à condição inicial é, portanto,

$$I(t) = \frac{V}{R}\Big(1 - \exp(-t/\tau)\Big), \tag{42}$$

onde $\tau = L/R$ é a escala de tempo que encontramos na discussão preliminar do problema.

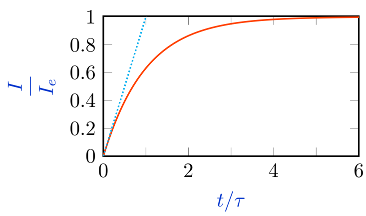

Figura 12: Corrente no circuito da figura 9 em função do tempo. A reta pontilhada é tangente à curva no instante $t = 0$. A corrente estacionária, que define a escala do eixo vertical, é $I_e = V/R$. O tempo de relaxação, que define a escala horizontal, é $\tau = L/R$.

A figura 12 mostra a corrente em função do tempo. A ordenada é expressa em unidades da corrente estacionária I_e, e a abscissa, em unidades do tempo τ. Como esperávamos, a corrente cresce do valor inicial, nulo, e tende para o valor estacionário $I_e = V/R$. A ascensão ocorre na escala de tempo τ. A corrente começa a crescer rapidamente. A linha pontilhada, tangente ao gráfico, mostra que, se a continuasse a crescer no mesmo ritmo, a corrente alcançaria o valor estacionário no tempo τ.

A taxa de crescimento, entretanto, não é uniforme. À medida que chega mais perto do valor estacionário, a corrente cresce ,cada vez mais devagar. A rigor, ela nunca chega a valer I_e. Depois de $t = 3\tau$, porém, ela passa de 95% do valor máximo, como o gráfico mostra. Depois de $t = 5\tau$ ela passa de 99%. Na prática, portanto, podemos dizer que a corrente chega ao valor estácionário em alguns intervalos de tempo τ.

A física da figura 12 é relativamente simples. Sem o indutor, a corrente subiria instantaneamente desde zero até o valor estacionário. O indutor impede que isso ocorra. No início, uma vez que a corrente é nula, o indutor recebe toda a força eletromotriz V da bateria. Assim, $V = L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ igualdade que define a taxa inicial de crescimento $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. Depois de algum tempo, a corrente terá crescido. Com isso, a força eletromotriz se dividirá entre uma fração RI no resistor e outra $L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ no indutor. A derivada será, portanto, menor, e o crescimento, mais lento. O tempo passa e a sequência continua: mais alta a corrente, maior a fração da força eletromotriz na resistência e menor a fração no indutor. Assim, $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ se torna menor e menor até a corrente estar muito perto do valor máximo V/R. Nesse ponto, a força eletromotriz estará praticamente toda concentrada no resistor, e $L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ será insignificante. Será, então, ótima aproximação dizer que a corrente alcançou o valor estacionário I_e.

Circuitos RC e LC

Circuito RC. Da mesma maneira que discutimos o circuito RL, da figura 9, podemos aplicar a lei das malhas a circuitos simples que contenham capacitores. Um exemplo importante é o circuito RC, esquematizado na figura 13. Na situação mais simples, o capacitor está inicialmente descarregado. Fecha-se a chave. No instante inicial, a diferença de potencial entre as placas do capacitor é nula e a diferença de potencial entre os terminais do resistor é igual à força eletromotriz da bateria. Começa a passar corrente. Aos poucos, o capacitor se carrega e a diferença de potencial entre suas placas passa a competir com a força eletromotriz da bateria. A diferença de potencial entre os polos do resistor aos poucos diminui, e, com ela, diminui a corrente. Depois de algum tempo, a corrente se torna insignificante.

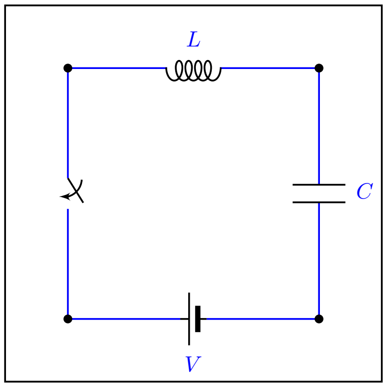

Figura 13: Circuito RC.

Podemos perguntar quanto tempo esse processo consome. Uma análise dimensional semelhante à que fizemos para o circuito RL mostra que a escala de tempo, aqui, é $\tau' = RC$. A aplicação da lei das malhas ao circuito da figura 13 mostra que a corrente é

$$I(t) = \frac{V}{R} \exp\left(-t/\tau'\right). \tag{43}$$

Circuito LC. No circuito LC, o resistor da figura 13 é substituído por um indutor. Ainda há uma escala de tempo. A análise dimensional identifica o tempo característico $T = \sqrt{LC}$. A física, porém, é diferente. Nos circuitos RL e RC a resistência impede que, depois de uma fase inicial, a corrente dependa do tempo; o circuito entra no regime estacionário.

Já no circuito LC, como inexiste resistência, a corrente nunca chega a um valor estacionário. Ela oscila em função do tempo, e o tempo característico T é o período das oscilações. Exercícios que ajudam a entender os circuitos RC e LC serão incluídos na próxima lista.

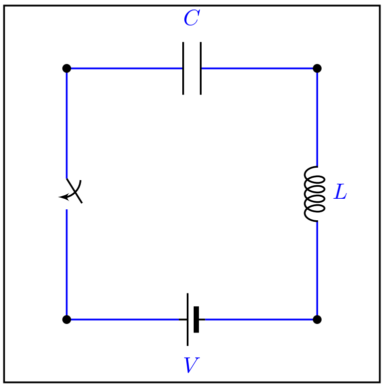

Figura 14: Circuito LC