Funções trigonométricas: seno e cosseno

Definição

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é periódica se existir um número* $p > 0$ *satisfazendo a condição* $f(x + p) = f(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*. Neste caso dizemos que* f *é periódica e o menor valor de* p *que satisfaz a condição anterior é chamado período de* f*.*

Definição

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é par se* $f(-x) = f(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é impar se* $f(-x) = -f(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Definição

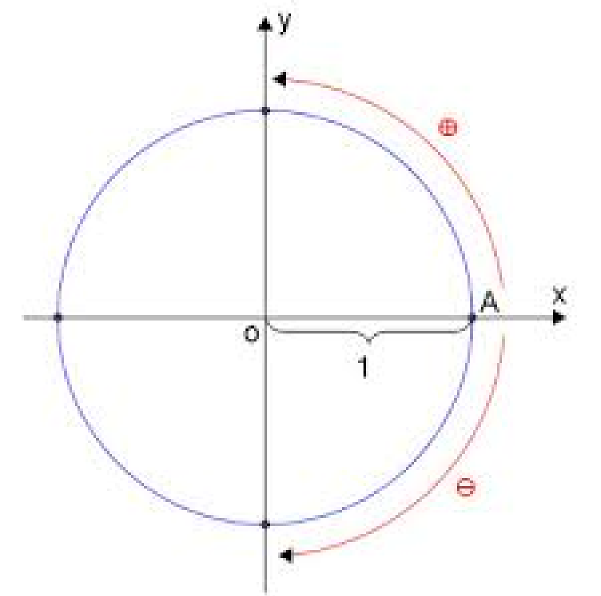
Consideremos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal uOv *e a circunferência* λ *de centro* O *e raio* $r = 1$. *Associamos a cada número real* x, *um único ponto* P *da circunferência* λ *do seguinte modo:*

a) se $x = 0$ *então* $P = (1, 0) = A$.

b) se $x > 0$ *então realizamos a partir de* $A = (1, 0)$ *um percurso de comprimento* x *no sentido anti-horário, e marcamos* P *como o ponto final do percurso.*

c) se $x < 0$ *então realizamos a partir de* $A = (1, 0)$ *um percurso de comprimento* $|x|$ *no sentido horário, e marcamos* P *como o ponto final do percurso.*

Se P *está associado ao número* x, *dizemos que* P *é a imagem de* x *na circunferência.*


y
x
A
O
1
+
−

Função seno

Definição

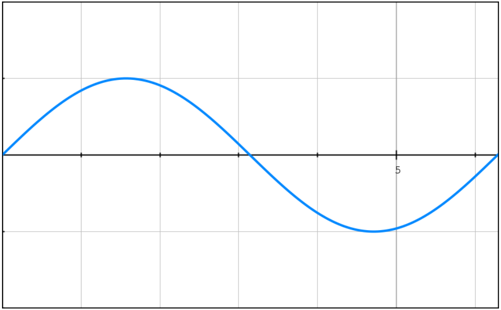
Seja x um número real e P a sua imagem na circunferência. Definimos por seno de x a ordenada do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos função seno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

Propriedades da função seno

Seja x um número real e P a sua imagem na circunferência:
a) Se P está no primeiro ou no segundo quadrante então $\sin x$ é positivo. Se P está no terceiro ou quarto quadrante então $\sin x$ é negativo.
b) Se P percorre o primeiro ou o quarto quadrante então $\sin x$ é crescente. Se P percorre o segundo ou o terceiro quadrante então $\sin x$ é decrescente.
c) A função seno é uma função impar e periódica de período 2π, isto é, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
d) A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$.

Gráfico de $f(x) = \sin x$

x	$\sin x$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0



Função cosseno

Definição

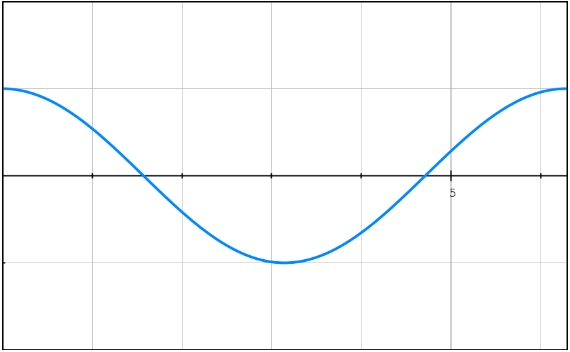
Seja x um número real e P a sua imagem na circunferência. Definimos por seno de x a abscissa do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos função cosseno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

Propriedades da função cosseno

Seja x um número real e P a sua imagem na circunferência:
a) Se P está no primeiro ou no quarto quadrante então $\cos x$ é positivo. Se P está no segundo ou terceiro quadrante então $\cos x$ é negativo.
b) Se P percorre o primeiro ou o segundo quadrante então $\cos x$ é decrescente. Se P percorre o terceiro ou o quarto quadrante então $\cos x$ é crescente.
c) A função cosseno é uma função par e periódica de período 2π, isto é, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
d) A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$.

Gráfico de $f(x) = \cos x$

x	$\cos x$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1



Propriedades

Sejam α e β números reais. Valem as seguintes propriedades:

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b) $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha) cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$

c) $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$

d) $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

e) $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$

f) $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

g) $\cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$