Equações e Inequações Logarítmicas

Equações Logarítmicas

Exemplo

Resolva a equação $\log_4(3x+2) = \log_4(2x+5)$

solução:
$\log_4(3x+2) = \log_4(2x+5) \Leftrightarrow 3x+2 = 2x+5 > 0$. Note que $3x+2 = 2x+5 \Leftrightarrow x = 3$. Como $3.3+2 = 11 > 0$, o conjunto solução é $S = \{3\}$.

Exemplo

Resolva a equação $\log_3(5x-6) = \log_3(3x-5)$

solução:
$\log_3(5x-6) = \log_3(3x-5) \Leftrightarrow 5x-6 = 3x-5 > 0$. Note que $5x-6 = 3x-5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Como $5.\frac{1}{2} - 6 < 0$, o conjunto solução $S = \emptyset$.

Exemplo

Resolva a equação $\log_5(4x-3)=2$

solução:

$\log_5(4x-3)=2 \Leftrightarrow 4x-3=5^2 \Leftrightarrow 4x-3=25 \Leftrightarrow x=\frac{22}{4}$. O conjunto solução $S=\{\frac{22}{4}\}$.

Exemplo

Resolva a equação $\log_{\frac{1}{3}}(2x^2-9x+4)=-2$

solução:

$\log_{\frac{1}{3}}(2x^2-9x+4)=-2 \Leftrightarrow 2x^2-9x+4=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow$
$2x^2-9x+4=3^2 \Leftrightarrow 2x^2-9x-5=0 \Leftrightarrow x=5,$ ou $x=-\frac{1}{2}$. O conjunto solução $S=\{5,-\frac{1}{2}\}$

Exemplo

Resolva a equação $\log_4^2 x - 2\log_4 x - 3 = 0.$

solução: Se $y = \log_4 x$, temos

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ ou } y = 3.$$

Daí $\log_4 x = -1$ ou $\log_4 x = 3 \Rightarrow x = 4^{-1} = \frac{1}{4}$ ou $x = 4^3 = 64$.
O conjunto solução é $S = \{\frac{1}{4}, 64\}$.

Exemplo

Resolva a equação $\log_x(4x-3) = \log_x(2x+1)$.

solução:

Temos que exigir que $0 < x \neq 1$. Por outro lado,

$\log_x(4x-3) = \log_x(2x+1) \Rightarrow 4x-3 = 2x+1 > 0 \Rightarrow x = 2$.

Como $0 < 2 \neq 1$ e $2.2+1 = 5 > 0$ o conjunto solução é $S = \{2\}$.

Exemplo

Resolva a equação $\log_{x+1}(3x+14) = \log_{x+1}(2-x)$.

solução:

Temos que exigir que $0 < x+1 \neq 1$, isto é, $x > -1$ e $x \neq 0$. Por outro lado,
$\log_{x+1}(3x+14) = \log_{x+1}(2-x) \Rightarrow 3x+14 = 2-x > 0 \Rightarrow x = -3$.
Como $-3 < -1$ o conjunto solução é $S = \emptyset$.

Inequações Logarítmicas

Exemplo

Resolva a inequação $\log_3(5x-2) < \log_3 4$

solução: Como $3 > 1$,
$\log_3(5x-2) < \log_3 4 \Rightarrow 0 < 5x - 2 < 4 \Rightarrow \frac{2}{5} < x < \frac{6}{5}$. O conjunto solução é $S = (\frac{2}{5}, \frac{6}{5})$.

Exemplo

Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1) \leq \log_{\frac{1}{2}}(2x+3)$

solução: Como $0 < \frac{1}{2} < 1$,
$\log_{\frac{1}{2}}(3x-1) \leq \log_{\frac{1}{2}}(2x+3) \Leftrightarrow 3x-1 \geq 2x+3 > 0$. Como $3x-1 \geq 2x+3 \Leftrightarrow x \geq 4$ e $2.4+3 = 11 > 0$, o conjunto solução é $S = [4, +\infty))$.

Exemplo

Resolva a inequação $\log_2(3x+5) > 3$

solução: Como $2 > 1$,
$\log_2(3x+5) > 3 = \log_2 2^3 \Leftrightarrow 3x+5 > 2^3 \Leftrightarrow x > 1$. O conjunto solução é $S = (1, +\infty)$.

Exemplo

Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{3}}(4x-3) \geq 2$

solução: Como $0 < \frac{1}{3} < 1$,
$\log_{\frac{1}{3}}(4x-3) \geq 2 = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 0 < 4x-3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{3}{4} < x \leq \frac{7}{9}$. O cojunto solução é $S = (\frac{3}{4}, \frac{7}{9}]$.

Exemplo

Resolva a inequação $3\log_3^2 x + 5\log_3 x - 2 \leq 0$

solução: Se $y = \log_3 x$, temos

$$3y^2 + 5y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq \frac{1}{3}.$$

Daí $-2 \leq \log_3 x \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{9} \leq x \leq \sqrt[3]{3}$. O conjunto solução é $S = [\frac{1}{9}, \sqrt[3]{3}]$.