Equações e Inequações exponenciais

Equações exponenciais

Exemplo

Resolva a equação exponencial

$2^x = 32$

solução: $2^x = 32 \Leftrightarrow 2^x = 2^5 \Leftrightarrow x = 5$. O conunto solução é $S = \{5\}$

Exemplo

Resolva a equação exponencial

$9^x = \frac{1}{27}$

solução:

$9^x = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^{2x} = \frac{1}{3^3} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{-3} \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$. O conunto solução é $S = \{-\frac{3}{2}\}$

Exemplo

Resolva a equação exponencial

$8^x = 0,25$

solução:

$8^x = 0,25 \Leftrightarrow 8^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-2} \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$. O conunto solução é $S = \{-\frac{2}{3}\}$

Exemplo

Resolva a equação exponencial

$7^{3x+4} = 49^{2x-3}$

solução:

$7^{3x+4} = 49^{2x-3} \Leftrightarrow 7^{3x+4} = 7^{4x-6} \Leftrightarrow 3x + 4 = 4x - 6 \Leftrightarrow x = 10$. O conunto solução é $S = \{10\}$.

Exemplo

Resolva a equação exponencial
$(9^{x+1})^{x-1} = 3^{x^2+x+4}$

solução:
$(9^{x+1})^{x-1} = 3^{x^2+x+4} \Leftrightarrow (3^{2x+2})^{x-1} = 3^{x^2+x+4} \Leftrightarrow 3^{2x^2-2} = 3^{x^2+x+4}$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 2 = x^2 + x + 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -2$. O conjunto solução é $S = \{-2, 3\}$.

Exemplo

Resolva a equação exponencial
$9^x + 3^{x+1} = 4$

solução: $9^x + 3^{x+1} = 4 \Leftrightarrow 9^x + 3^{x+1} - 4 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} + 3.3^x - 4 = 0.$
Fazendo $y = 3^x$ temos: $y^2 + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ou$y = -4$.
Como $3^x > 0$ para todo x vem que $y = 3^x = 1$ que implica $x = 1$.

Exemplo

Resolva a equação em $\mathbb{R}_+$

$x^{2-3x} = 1$

solução:

• Caso: $x = 0$ ou $x = 1$

$x = 0 \Rightarrow 0^2 = 1$ falso.

$x = 1 \Rightarrow 1^{-1} = 1$ verdadeiro.

$S_1 = \{1\}$.

• Caso: $0 < x \neq 1$

$x^{2-3x} = 1 \Leftrightarrow x^{2-3x} = x^0 \Leftrightarrow 2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

$S_2 = \{\frac{2}{3}\}$

O conjunto solução é $S = S_1 \cup S_2 = \{1, \frac{2}{3}\}$.

Inequações exponenciais

Exemplo

Resolva a inequação exponencial

$2^x < 32$

solução: $2^x < 32 \Leftrightarrow 2^x < 2^5$. Como $2 > 1$ então $2^x < 2^5 \Leftrightarrow x < 5$. O conjunto solução é $S = (-\infty, 5)$.

Exemplo

Resolva a inequação exponencial

$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{81}$

solução: $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{81} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^4$. Como $\frac{1}{3} < 1$ então $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^4 \Leftrightarrow x < 4$. O conjunto solução $S = (-\infty, 4)$.

Exemplo

Resolva a inequação exponencial
$7^{5x-6} \geq 1$

solução: $7^{5x-6} \geq 1 \Leftrightarrow 7^{5x-6} \geq 7^0$. Como $7 > 1$ então $7^{5x-6} \geq 7^0 \Leftrightarrow 5x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{6}{5}$. O conjunto solução é $S = [\frac{6}{5}, +\infty)$.

Exemplo

Resolva a inequação exponencial
$3^{x^2-5x+6} \geq 9$

solução: $3^{x^2-5x+6} \geq 9 \Leftrightarrow 3^{x^2-5x+6} \geq 3^2$. Como $3 > 1$ então $3^{x^2-5x+6} \geq 3^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \leq 1$ ou $x \geq 4$. O conjunto solução é $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$.

Exemplo

Resolva a inequação exponencial
$2^{x-1} + 2^{x} + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} > 240$

solução:
$2^{x-1} + 2^{x} + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} > 240 \Leftrightarrow$
$2^{x}(2^{-1} + 1 + 2 - 2^{2} + 2^{3}) > 2^{4}15 \Leftrightarrow$
$\frac{15}{2}2^{x} > 2^{4}15 \Leftrightarrow 2^{x} > 2^{5} \Leftrightarrow x > 5$ (pois $2 > 1$).
O conjunto solução é $S = (5, +\infty)$.

Exemplo

Resolva a inequação exponencial
$3^{2x} - 3^{x+1} - 3^x + 3 > 0$

solução:
$3^{2x} - 3^{x+1} - 3^x + 3 > 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 3^x 3 - 3^x + 3 > 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 3^x 4 + 3 > 0.$
Fazendo $y = 3^x$, temos: $y^2 - 4y + 3 > 0 \Leftrightarrow y < 1$ ou $y > 3$.
Mas $y = 3^x$, logo $3^x < 1 = 3^0$ ou $3^x > 3 = 3^1 \Leftrightarrow x < 0$ ou $x > 1$.
O conjunto solução é $S = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Exemplo

Resolva a inequação $\mathbb{R}_+$

$x^{5x-2} > 1$

solução:

• Caso: $x = 0$ ou $x = 1$

$x = 0 \Rightarrow 0^{-2} > 1$ falso.

$x = 1 \Rightarrow 1^{3} > 1$ falso.

$S_1 = \emptyset$.

• Caso: $0 < x < 1$

$x^{5x-2} > 1 \Leftrightarrow 5x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{5}$.

$S_2 = (0, 1) \cap (-\infty, \frac{2}{5}) = (0, \frac{2}{5})$

• Caso: $x > 1$

$x^{5x-2} > 1 \Leftrightarrow 5x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{5}$.

$S_3 = (\frac{2}{5}, +\infty) \cap (1, +\infty) = (1, +\infty)$.

O conjunto solução é: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (0, \frac{2}{5}) \cup (1, +\infty)$