Potências e raízes de um número real

Potência de expoente natural

Definição

Seja a um número real e n um natural. A potência de base a e expoente n é o número

$$\begin{cases} a^0 = 1, & se\ a \neq 0 \\ a^n = \overbrace{a \dots a}^{n-vezes}, & se \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Exemplo

1) $5^0 = 1$

2) $(-3)^0 = 1$

3) $2^3 = 2.2.2 = 8$

Exemplo

1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{16}{81}$

2) $(-4)^1 = -4$

3) $(0,1)^5 = \left(\dfrac{1}{10}\right)^5 = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{10^5} = 0,00001$

4) $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$

Potência de expoente inteiro

Definição

Seja a um número real não nulo e n um natural. A potência de base a e expoente $-n$ é o número

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Observação: Segue da definição anterior, que a potência de base real, não nula, e expoente inteiro negativo é definida como o inverso da correspondente potência de inteiro positivo.

Exemplo

1) $3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

2) $2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$

3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{\frac{4}{9}} = \dfrac{9}{4}$

Teorema

Sejam a e b números reais diferentes de zero e m e n números inteiros. Valem as seguintes propriedades:

P1) $a^m a^n = a^{m+n}$

P2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

P3) $(ab)^n = a^n b^n$

P4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

P5) $(a^n)^m = a^{nm}$

Exemplo

1) $2^3 2^7 = 2^{10}$

2) $\dfrac{7^9}{7^5} = 7^{9-4} = 7^4$

3) $(5.3)^4 = 5^4.3^4$

4) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^6 = \dfrac{3^6}{4^6}$

5) $(9^8)^2 = 9^{16}$

Raiz enésima

Definição

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. *A raiz enésima positiva de* a *é o único real positivo ou nulo* b *tal que* $b^n = a$. *Neste caso denotamos* $b = \sqrt[n]{a}$.

Exemplo

1) $\sqrt[5]{32} = 2$ *pois* $2^5 = 32$.

2) $\sqrt[3]{27} = 3$ *pois* $3^3 = 27$.

3) $\sqrt{25} = 5$ *pois* $5^2 = 25$.

4) $\sqrt[8]{0} = 0$ *pois* $0^8 = 0$.

5) $\sqrt[6]{1} = 1$ *pois* $1^6 = 1$.

Observação: Segue da definição que $(\sqrt[n]{a})^n = a$, para $a \geq 0$.

Teorema

Sejam $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ *e* $p \geq 1$. *Valem as seguintes propriedades:*

P1) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, *para* $a \neq 0$ *ou* $m \neq 0$.

P2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

P3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, *para* $b \neq 0$.

P4) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, *para* $a \neq 0$ *ou* $m \neq 0$.

P5) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$

Exemplo

1) $\sqrt{3}\sqrt{8} = \sqrt{3 \cdot 8} = \sqrt{24}$

2) $\dfrac{\sqrt[7]{3}}{\sqrt[7]{2}} = \sqrt[7]{\dfrac{3}{2}}$

3) $\sqrt{3}\,\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3}\,\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{108}$

4) $\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{10}{2}} = \sqrt[3]{5}$

5) $\sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt{\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2-1} = 1$

6) $(\sqrt[3]{12})^2 = \sqrt[6]{12}.$

7) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{9}} = \sqrt[12]{9}$

Potência de expoente racional

Definição

Sejam $a \in \mathbb{R}$ $a > 0$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, *com* $p \in \mathbb{Z}$ *e* $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. *A potência de base* a *e expoente* $\frac{p}{q}$ *é o número*

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Se $a > 0$ *e* $\frac{p}{q} > 0$, *definimos* $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

Teorema

Sejam a e b números reais positivos, $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ números racionais. Valem as seguintes propriedades:

P1) $a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$

P2) $\dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$

P3) $(ab)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}}$

P4) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$

P5) $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\frac{r}{s}}$

Teorema

Sejam a número real positivo e $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ números racionais.

- *Se $a > 1$ e $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ então $a^{\frac{p}{q}} > a^{\frac{r}{s}}$.*
- *Se $0 < a < 1$ e $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ então $a^{\frac{p}{q}} < a^{\frac{r}{s}}$.*

Potência de expoente real

Definição

Seja a um real positivo α é um número real. Definimos a^α como o limite de $a^{\frac{p}{q}}$ quando $\frac{p}{q}$ racional tende a α, ou seja,

$$a^\alpha = \lim_{\frac{p}{q} \to \alpha} a^{\frac{p}{q}}.$$

Teorema

Sejam a *e* b *números reais positivos,* α *e* β *números reais. Valem as seguintes propriedades:*

P1) $a^{\alpha} a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$

P2) $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}$

P3) $(ab)^{\alpha} = a^{\alpha} b^{\alpha}$

P4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha} = \dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$

P5) $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha\beta}$