Sinal da função quadrática e Inequação do segundo grau

Sinal da função quadrática

Teorema

Suponha que $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática e $\Delta < 0$.

- *Se $a > 0$ então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*
- *Se $a < 0$ então $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, e $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ então da forma canônica

$$af(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja, $f(x)$ tem o sinal de a para todo x.

Teorema

Suponha que $f(x) = ax^2 + bx + c$ *uma função quadrática e* $\Delta = 0$*.*

- *Se* $a > 0$ *então* $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*
- *Se* $a < 0$ *então* $f(x) \leq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ e $-\frac{\Delta}{4a^2} = 0$ então da forma canônica

$$af(x) = a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja, se $a > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, e se $a < 0 \Rightarrow f(x) \leq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Teorema

Suponha que $f(x) = ax^2 + bx + c$ *uma função quadrática e* $\Delta > 0$. *Sejam* x_1 *e* x_2 *as raízes de* f *e* $x_1 < x_2$.

- *Se* $x < x_1$ *ou* $x > x_2$ *então o sinal de* $f(x)$ *é o sinal de* a.
- *Se* $x_1 < x < x_2$ *então o sinal de* $f(x)$ *é o sinal de* $-a$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
af(x) &= a^2\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\
&= a^2\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
&= a^2\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left((x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\
&= a^2(x - x_1)(x - x_2)
\end{aligned}$$

Agora:

-

$$x < x_1 < x_2 \Rightarrow (x - x_1) < 0, \text{ e } (x - x_2) < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow af(x) = a^2(x - x_1)(x - x_2) > 0.$$

Portanto o sinal de $f(x)$ é o sinal de a.

$$x > x_2 > x_1 \Rightarrow (x - x_1) > 0, \text{ e } (x - x_2) > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow af(x) = a^2(x - x_1)(x - x_2) > 0.$$

Portanto o sinal de $f(x)$ é o sinal de a.

- $$x_1 < x < x_2 \Rightarrow (x - x_1) > 0, \quad \text{e} \ \ (x - x_2) < 0 \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow af(x) = a^2 (x - x_1)(x - x_2) < 0.$$

Portanto o sinal de $f(x)$ é o sinal de $-a$.

Inequação do segundo grau

Suponha $a \neq 0$, b e c números reais. As inequações

- $ax^2 + bx + c > 0$,
- $ax^2 + bx + c \geq 0$,
- $ax^2 + bx + c < 0$,
- $ax^2 + bx + c \leq 0$.

são chamadas inequações do segundo grau.

Para encontrar a solução de uma inequação do segundo grau é preciso fazer o estudo do sinal de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemplo

Resolva a inequação $x^2 - 3x + 2 > 0$.

solução: $a = 1 > 0$, $\Delta = 1 > 0$ e as raízes $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Deste modo $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1$, ou $x > 2$. O conjunto solução é $S = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

Gráfico de $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Exemplo

Resolva a inequação $-x^2 + x + 6 > 0$.

solução: $a = -1 < 0$, $\Delta = 25 > 0$ e as raízes $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$. Deste modo, $-x^2 + x + 6 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$. O cojunto solução é $S = (-2, 3)$.

Gráfico de $f(x) = -x^2 + x + 6$

Exemplo

Resolva a inequação $-3x^2 - 8x + 3 \leq 0$.

solução: $a = -3 < 0$, $\Delta = 100 > 0$ e as raízes $x_1 = -3$ e $x_2 = \frac{1}{3}$. Deste modo, $-3x^2 - 8x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$, ou $x \geq \frac{1}{3}$. O conjunto solução é $S = (-\infty, -3] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$.

Gráfico de $f(x) = -3x^2 - 8x + 3$

Exemplo

Resolva a inequação $x^2 + 3x + 7 \leq 0$.

solução: $a = 1 > 0$, $\Delta = -19 < 0$.
Deste modo, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + 3x + 7 \leq 0$. O conjunto solução é $S = \emptyset$.

Gráfico de $f(x) = x^2 + 3x + 7$

Exemplo

Resolva a inequação $4x^2 - 4x + 1 > 0$.

solução: $a = 4 > 0$, $\Delta = 0$.
Deste modo, $4x^2 - 4x + 1 > 0$ para todo $x \neq \frac{1}{2}$. O conjunto solução é $S = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$.

Gráfico de $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$