Física 1 (4310145) - Aula 11/06/2020

Informações

- Capítulo 2
  - Perguntas: Todas!
  - Problemas: 2.1, 2.3, 2.5, 2.7, 2.9, 2.14, 2.17, 2.21, 2.31, 2.37, 2.41, 2.67, 2.69
- Capítulo 3
  - Perguntas: 3.1, 3.3, 3.5 , 3.12, 3.13
  - Problemas: 3.1, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.9, 3.10, 3.15, 3.32, 3.27, 3.33, 3.37, 3.43
- Capítulo 4
  - Perguntas: 4.1, 4.2, 4.3, 4.5, 4.13, 4.17
  - Problemas: 4.1, 4.3, 4.7, 4.9, 4.11, 4.19, 4.25, 4.29, 4.47, 4.57, 4.65, 4.69
- Capítulo 5
  - Perguntas: 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.9
  - Problemas: 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.7, 5.11, 5.13, 5.15, 5.19, 5.21, 5.31, 5.35, 5.45, 5.63
- Capítulo 6
  - Perguntas: 6.1, 6.2, 6.3, 6.5, 6.6, 6.9. 6.13
  - Problemas: 6.1, 6.3, 6.4, 6.5, 6.13, 6.19, 6.25, 6.33, 6.39, 6.41, 6.43, 6.57, 6.59
- Capítulo 7
  - Perguntas: 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.9, 7.11
  - Problemas: 7.1, 7.3, 7.5, 7.7, 7.15, 7.17, 7.21, 7.23, 7.31, 7.37, 7.41, 7.43, 7.45, 7.49, 7.67
- Capítulo 8
  - Perguntas: 8.1, 8.2, 8.3, 8.5, 8.9, 8.11
  - Problemas: 8.1, 8.2, 8.3, 8.5, 8.7, 8.9, 8.13, 8.15, 8.19, 8.25, 8.37, 8.39, 8.41, 8.45, 8.47, 8.53, 8.57, 8.67
- Capítulo 9
  - Perguntas: 9.1, 9.2, 9.3, 9.5, 9.7, 9.9, 9.11
  - Problemas: 9.1, 9.2, 9.3, 9.5, 9.7, 9.11, 9.13, 9.17 , 9.19, 9.25, 9.29, 9.33, 9.37, 9.39, 9.41, 9.45, 9.49, 9.51, 9.55, 9.61, 9.63, 9.73, 9.75
- Capítulo 10
  - Problemas: 10.1, 10.2, 10.3, 10.4, 10.5, 10.7, 10.11, 10.13, 10.15, 10.17, 10.19, 10.25, 10.28, 10.33, 10.35, 10.41, 10.43, 10.49, 10.51, 10.53, 10.57, 10.59, 10.61, 10.63
- Capítulo 11
  - Perguntas:
  - Problemas:

jader.pereira.santos@gmail.com (11-963653978)
felipefreitas@usp.br

Sumário

1. Rolagem, torque e momento angular
   - Momento Angular de um Sistema de Partículas
   - Momento Angular de um Corpo Rígido Girando em Torno de um Eixo Fixo
   - Conservação do momento angular

Sumário

1. Rolagem, torque e momento angular
   - Momento Angular de um Sistema de Partículas
   - Momento Angular de um Corpo Rígido Girando em Torno de um Eixo Fixo
   - Conservação do momento angular

Sumário

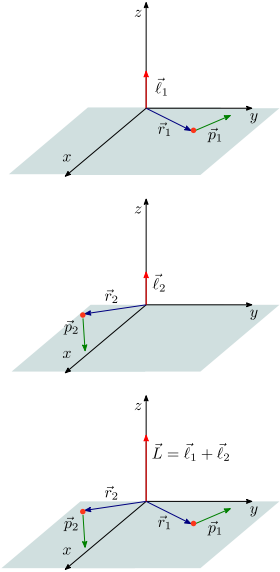
1. Rolagem, torque e momento angular
   - Momento Angular de um Sistema de Partículas
   - Momento Angular de um Corpo Rígido Girando em Torno de um Eixo Fixo
   - Conservação do momento angular

Momento Angular de um Sistema de Partículas

- Vamos agora definir o momento angular de um sistema de partículas em relação a uma origem.
- O momento angular total $\vec{L}$ do sistema é a soma vetorial dos momentos angulares $\vec{\ell}$ das partículas do sistema

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \cdots + \vec{\ell}_n$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i$$



$\vec{\ell}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

Momento Angular de um Sistema de Partículas

- O momento angular total do sistema é

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \qquad (1)$$

- A posição do CM do sistema é dada por

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

- Se $\vec{r}'_i$ e $\vec{v}'_i$ são a posição e a velocidade da partícula em relação ao CM, temos

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{cm}$$
$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{cm}$$

- Note que

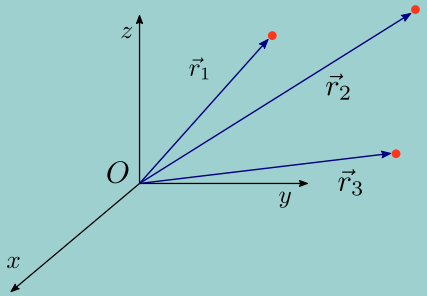
$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{cm}$$
$$\frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}'_i + \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_{cm}$$
$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0 \qquad (2)$$

- Do resultado anterior, temos

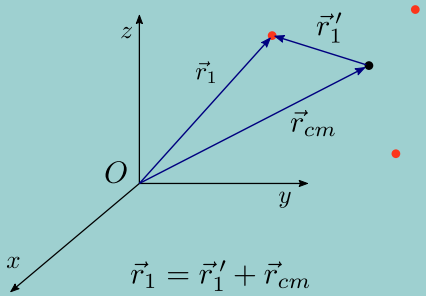
$$\sum_i m \vec{v}'_i = \sum_i \vec{p}'_i = 0 \qquad (3)$$

Momento Angular de um Sistema de Partículas

- O momento angular total do sistema é



- Note que



$\vec{r}_{cm}$

)

)

Momento Angular de um Sistema de Partículas

- O momento angular total do sistema é

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \qquad (1)$$

- A posição do CM do sistema é dada por

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

- Se $\vec{r}'_i$ e $\vec{v}'_i$ são a posição e a velocidade da partícula em relação ao CM, temos

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{cm}$$
$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{cm}$$

- Note que

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{cm}$$
$$\frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}'_i + \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_{cm}$$
$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0 \qquad (2)$$

- Do resultado anterior, temos

$$\sum_i m \vec{v}'_i = \sum_i \vec{p}'_i = 0 \qquad (3)$$

Momento Angular de um Sistema de Partículas

- Podemos usar os resultados (2) e (3) para rescrever (1)

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{r}\,'_i + \vec{r}_{cm}) \times (\vec{v}\,'_i + \vec{v}_{cm})$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{r}\,'_i \times \vec{v}\,'_i + \vec{r}_{cm} \times \vec{v}\,'_i + \vec{r}\,'_i \times \vec{v}_{cm} + \vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm})$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}\,'_i \times \vec{v}\,'_i + \vec{r}_{cm} \times \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}\,'_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}\,'_i \right) \times \vec{v}_{cm} + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm}$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}\,'_i \times \vec{v}\,'_i + \vec{r}_{cm} \times (M \vec{v}_{cm})$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}\,' + \vec{r}_{cm} \times \vec{p}_{cm}}$$

- $\vec{L}\,'$ é o momento angular total do sistema em relação ao CM e $\vec{r}_{cm} \times \vec{p}_{cm}$ é o momento angular do CM em relação a O
- Se o CM está em repouso, $\vec{p}_{cm} = 0$ e $\vec{L} = \vec{L}\,'$

Lei Fundamental da dinâmica de rotações

- Derivando a relação (1) com relação a t obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{v}_i \times \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \vec{a}_i\right) \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times (m_i \vec{a}_i) \qquad (4)\end{aligned}$$

- Da segunda Lei de Newton temos

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ij} \qquad (5)$$

- Usando (5) em (4), temos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

- Vamos agora focar no segundo termo da equação acima

Lei Fundamental da dinâmica de rotações

- Temos

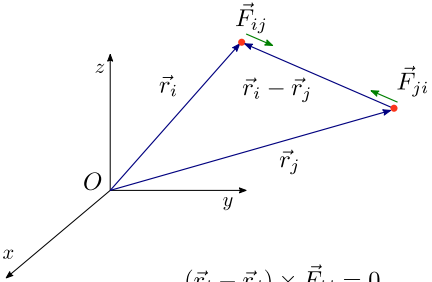
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left[\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij}+\vec{r}_j\times\vec{F}_{ji}\right] \qquad (6)$$

- Pela terceira Lei de Newton

$$\vec{F}_{ji}=-\vec{F}_{ij}$$

- Assim, podemos reescrever (6) como

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij}&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left[\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij}-\vec{r}_j\times\vec{F}_{ij}\right]\\ &=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{F}_{ij}\\ &=0\end{aligned}$$



$$(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{F}_{ij}=0$$

Lei Fundamental da dinâmica de rotações

- Voltando para o slide 9/26, temos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i^{\text{ext}} = \vec{\tau}_{\text{res}}} \tag{7}$$

- A taxa de variação do momento angular total do sistema em relação a um ponto O (num referencial inercial) é igual à resultante de todos os torques externos em relação a O.
- A Eq. (7) permanece válida com respeito ao CM, mesmo que este esteja acelerado[†]:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}'_{\text{res}}}$$

- onde $\vec{\tau}'_{\text{res}}$ é a resultante dos torques externos em relação ao CM.

[†] H.M. Nussenzveig. *Curso de física básica, 1: mecânica.*

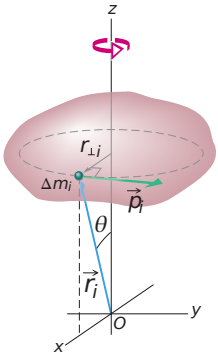
Sumário

1. Rolagem, torque e momento angular
   - Momento Angular de um Sistema de Partículas
   - Momento Angular de um Corpo Rígido Girando em Torno de um Eixo Fixo
   - Conservação do momento angular

Momento Angular de um Corpo Rígido Girando em Torno de um Eixo Fixo

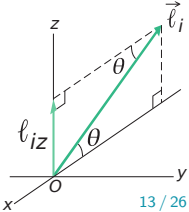
- Vamos agora definir o momento angular de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo.
- O eixo fixo é o eixo z e o corpo gira com velocidade angular ω constante.
- O módulo de $\vec{\ell}_i$ em relação a O é

$$\ell_i = (r_i)(p_i)\sin(90°)$$
$$\ell_i = (r_i)(\Delta m_i v_i)$$



- Queremos aqui determinar a componente do momento angular em relação ao eixo de rotação. Essa componente é dada por

$$\ell_{iz} = \ell_i \sin\theta$$
$$\ell_{iz} = (r_i)(\Delta m_i v_i)\sin\theta$$
$$\ell_{iz} = (r_{\perp i})(\Delta m_i v_i)$$



$$\vec{\ell}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Momento Angular de um Corpo Rígido Girando em Torno de um Eixo Fixo

- Até agora, encontramos

$$\ell_{iz} = (r_{\perp i})(\Delta m_i v_i)$$

- Note que podemos usar $v_i = r_{\perp i}\omega$ para escrever

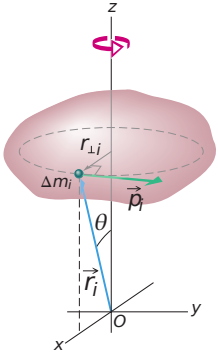
$$\ell_{iz} = (r_{\perp i})^2 \Delta m_i \omega$$

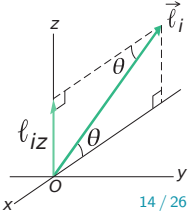
- A componente z do momento angular do corpo rígido como um todo pode ser calculada somando as contribuições de todos os elementos de massa do corpo

$$L_z = \sum_i \ell_{iz} = \sum_i (r_{\perp i})^2 \Delta m_i \omega$$

$$L_z = \omega \left(\sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 \right)$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{\ell}_i \qquad \vec{L} = L_x \hat{\imath} + L_y \hat{\jmath} + L_z \hat{k}$$





Momento Angular de um Corpo Rígido Girando em Torno de um Eixo Fixo

- Até agora, encontramos

$$L_z = \omega\left(\sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2\right)$$

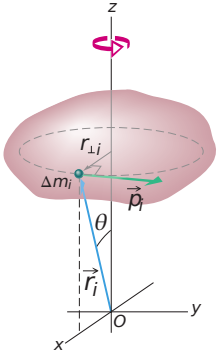
- Porém, note que

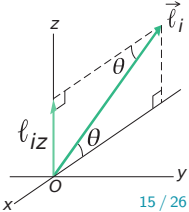
$$I = \left(\sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2\right)$$

em que I é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo fixo.

- Assim, podemos escrever

$$\boxed{L_z = \omega I}$$

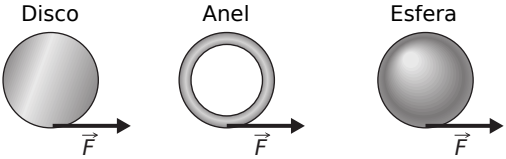




$\vec{L} = \sum_i \vec{\ell}_i \qquad \vec{L} = L_x\hat{\imath} + L_y\hat{\jmath} + L_z\hat{k}$

Teste

Na figura, um disco, um anel e uma esfera maciça são postos para girar em torno de um eixo central fixo (como piões) por meio de um barbante enrolado, que aplica a mesma força tangencial constante aos três objetos. Os três objetos têm a mesma massa e o mesmo raio e estão inicialmente em repouso. Ordene os objetos de acordo (a) com o momento angular em relação ao eixo central e (b) com a velocidade angular, em ordem decrescente, após o barbante ter sido puxado durante o mesmo intervalo de tempo Δt.



Sumário

1. Rolagem, torque e momento angular
   - Momento Angular de um Sistema de Partículas
   - Momento Angular de um Corpo Rígido Girando em Torno de um Eixo Fixo
   - Conservação do momento angular

Conservação do momento angular

- Até agora vimos as leis de conservação da energia e do momento linear
- Vamos agora falar da lei de conservação do momento angular
- Já obtivemos para um sistema de partículas

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- Se nenhum torque externo resultante age sobre o sistema, a equação se torna

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{L} = \text{constante} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{L}_i = \vec{L}_f}$$

- Se o torque externo resultante que age sobre um sistema é nulo, o momento angular $\vec{L}$ do sistema permanece constante, sejam quais forem as mudanças que ocorrem dentro do sistema.

Conservação do momento angular

- Dependendo dos torques externos que agem sobre um sistema, o momento angular pode ser conservado apenas em uma ou duas direções:

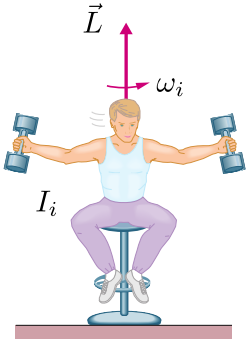
$$\boxed{\vec{\tau}_{\text{res}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad \tau_{\text{res},x}\hat{\imath} + \tau_{\text{res},y}\hat{\jmath} + \tau_{\text{res},z}\hat{k} = \frac{dL_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dL_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dL_z}{dt}\hat{k}}$$

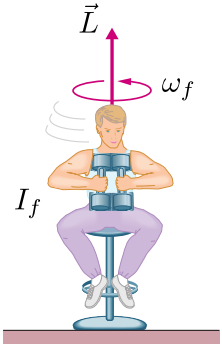
- Se a componente do torque externo resultante que age sobre um sistema ao longo de um eixo é nula, a componente do momento angular do sistema ao longo desse eixo permanece constante, sejam quais forem as mudanças que ocorrem dentro do sistema.

Conservação do momento angular

Exemplo: Aluno que gira

$$L_i = L_f \quad \Longrightarrow \quad I_i\omega_i = I_f\omega_f \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} I_i > I_f \\ \omega_i < \omega_f \end{cases}$$

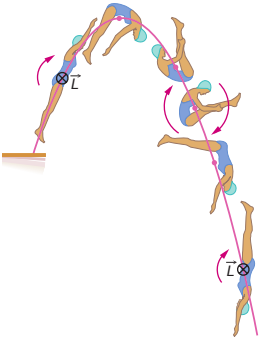




Conservação do momento angular

Exemplo: Salto de trampolim

$$L_i = L_f \quad \Longrightarrow \quad I_i\omega_i = I_f\omega_f \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} I_i > I_f \\ \omega_i < \omega_f \end{cases}$$



O momento angular da nadadora é constante, mas ela ainda pode mudar a velocidade de rotação.

Teste

Um besouro está na borda de um pequeno disco que gira como um carrossel. Se o besouro se desloca em direção ao centro do disco, as seguintes grandezas (todas em relação ao eixo central) aumentam, diminuem ou permanecem as mesmas: (a) momento de inércia, (b) momento angular e (c) velocidade angular?

Exemplo: Um disco girando

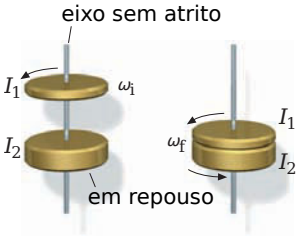
O disco 1 gira livremente com uma velocidade anguar ω_i em torno de um eixo vertical que coincide com seu eixo de simetria. Seu momento de inércia em relação a esse eixo é I_1. Ele cai sobre o disco 2, de momento de inércia I_2, que está inicialmente em repouso. Devido ao atrito cinético, os dois discos acabam por ter a mesma velocidade angular ω_f. Determine ω_f.

- Como não existem torques externos atuando no sistema, podemos escrever

$$L_i = L_f$$

$$\omega_i I_1 + 0 I_2 = \omega_f (I_1 + I_2)$$

$$\omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i = \frac{1}{1 + I_2/I_1}\omega_i$$



Conservação do momento angular

Translação		Rotação	
Força	$\vec{F}$	Torque	$\vec{\tau}(=\vec{r}\times\vec{F})$
Momento Linear	$\vec{p}$	Momento Angular	$\vec{\ell}(=\vec{r}\times\vec{p})$
Momento Linear[b]	$\vec{P}\,(=\Sigma\vec{p}_i)$	Momento Angular[b]	$\vec{L}\left(=\Sigma\vec{\ell}_i\right)$
Momento Linear[b]	$\vec{P}=M\vec{v}_{\text{cm}}$	Momento Angular[c]	$L=I\omega$
Segunda Lei de Newton [b]	$\vec{F}_{\text{res}}=\frac{d\vec{P}}{dt}$	Segunda Lei de Newton[b]	$\vec{\tau}_{\text{res}}=\frac{d\vec{L}}{dt}$
Lei de Conservação[d]	$\vec{P}=$ constante	Lei de Conservação[d]	$\vec{L}=$ constante

[b] Para sistemas de partículas, incluindo corpos rígidos.

[c] Para um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo; L é a componente paralela ao eixo.

[d] Para um sistema fechado e isolado.

Dicas

- Reproduza as passagens de maneira independente!
- Estude as referências!

  - D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker. *Fundamentos de Física - Mecânica*, volume 1. LTC, 10 edition, 2016
  - P.A. Tipler and G. Mosca. *Física para Cientistas e Engenheiros*, volume 1. LTC, 10 edition, 2009
  - H.M. Nussenzveig. *Curso de física básica, 1: mecânica.* E. Blucher, 2013
  - H.D. Young, R.A. Freedman, F.W. Sears, and M.W. Zemansky. *Sears e Zemansky física I: mecânica*
  - M. Alonso and E.J. Finn. *Física: Um curso universitário - Mecânica.* Editora Blucher, 2018
  - R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M.L. Sands. *Lições de Física de Feynman.* Bookman, 2008

O CENTRO ESTÁ