EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1^a ORDEM

1. Solução geral e Teorema de Existência de Unicidade

A equação diferencial ordinária de 1^a ordem, escrita na forma normal é:

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Em certos casos, usando manipulações e integrações podemos encontrar a família de todas as soluções de 1, usualmente denominada **solução geral** de 1.

Exemplo 1.1. *Consideremos a equação $y' = y$. Temos então (se $y \neq 0$), $\frac{y'}{y} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln |y| = 1 \Leftrightarrow \ln |y| = x + C \Leftrightarrow |y| = e^C \cdot e^x$, sendo C uma constante real Daí obtemos $y = \pm e^C \cdot e^x = Ke^x$, K uma constante real não nula. Agora, se $K = 0$, obtemos $y \equiv 0$ que, como se pode verificar, também é solução da equação. Além disso, essas são as únicas soluções do problema pois, se φ for solução no intervalo I, então: $(e^{-x}\varphi)' = (-e^{-x}\varphi) + (e^{-x}\varphi) = 0$, de onde decorre que $(e^{-x}\varphi) = k$ no intervalo I e, portanto, $\varphi = ke^x$.*

Assim, a solução geral da equação é $y(x) = Ke^x$, K constante arbitrária.

Dados valores arbitrários, x_0 e y_0, podemos sempre encontrar a constante K de tal forma que $y(x_0) = y_0$. De fato: $y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow Ke^{x_0} = y_0 \Leftrightarrow K = y_0 \cdot e^{-x_0} \Leftrightarrow y(x) = y_0 \cdot e^{(x-x_0)}$.

Date: July 17, 2020.

A situação descrita no (1.3) ilustra o que ocorre no caso geral, a *solução geral* inclui uma constante arbitrária, determinada pelas *condições iniciais*. De fato, temos o seguinte resultado fundamental.

Teorema 1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aberto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 . Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função diferenciável $\Phi : I \to \mathbb{R}$ com $(x, \Phi(x)) \in \Omega$, para cada $x \in I$, que é solução do problema de valor inicial:*

$$\left\{ \begin{array}{rl} \frac{dy}{dx} & = f(x,y). \\ y(x_0) & = y_0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Faremos um esboço da prova mais adiante, depois de considerar alguns casos em que uma solução explícita pode ser encontrada. De fato, as condições exigidas no enunciado podem ser um pouco relaxadas mas *alguma* regularidade é necessária, especialmente para a parte de unicidade.

Exemplo 1.3. *A função $y = \frac{1}{16}x^4$ é uma solução da equação $y' = xy^{1/2}$, com condição inicial $y(0) = 0$. Por outro lado, a função $y(x) \equiv 0$ também é solução com a mesma condição inicial. Observemos que a função $f(x, y) = xy^{1/2}$ não é derivável em relação à variável y na origem.*

2. Funções Implícitas

Dada uma equação (algébrica), do tipo $F(x, y) = 0$, podemos, às vezes "resolver para uma das variáveis" como função da outra.

Exemplo 2.1. *Dada a função; $F(x, y) = yx^2 + 2xy - 2$, temos $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = y(x) = \frac{2}{x^2+2x}$ (ou $x = -y \pm \sqrt{y^2 + 2y}$).*

Embora seja difícil encontrar uma solução explícita, na maioria dos casos, o *Teorema das Funções Implícitas* garante que esta solução sempre existe, observadas certas condições.

Teorema 2.2. *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, e $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = c$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Então existe um intervalo I contendo x_0 e uma função $g : I \to J$, de classe C^1. tal que, para todo $x \in I$, $f(x, y) = c$ se e somente se $y = g(x)$. E, para todo $x \in I$, temos $g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, g(x))$.*

3. Equações exatas

Definição 3.1. *A equação diferencial $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ é dita exata em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se existe uma função $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q$, ou seja, $\nabla \Phi = (P, Q)$. A função Φ é então denominada uma integral primeira para a equação, ou um potencial para o campo $P\vec{i} + Q\vec{j}$.*

É conveniente usar a notação de Leibniz: $P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$ e frequentemente escreveremos a equação na "forma diferencial" :

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0, \tag{3}$$

P e Q definidas em um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aberto.

Exemplo 3.2. $4xy + 2x^2\frac{dy}{dx} = 0, \quad \Phi(x, y) = 2x^2 y.$

Suponhamos que Φ é uma integral primeira de classe C^1 da equação $P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$ em Ω e seja $y(x)$ dada implicitamente pela equação $\Phi(x, y) = c$. Então temos,

$0 = \frac{d}{dx}(\Phi(x.y(x)) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}(x, y(x)) = P(x.y(x)) + Q(x, y(x))(x.y(x))\frac{dy}{dx}(x, y(x))$. Portanto $y(x)$ é solução da equação no intervalo onde estiver definida.

Reciprocamente, se $y : I \to \mathbb{R}$ for solução, segue das igualdades que $\Phi(x, y(x)) = c$. Ou seja, as soluções da equação são dadas implicitamente pelas curvas de nível de Φ.

Observemos também que poderíamos, igualmente, resolver a equação para x, como função de y, obtendo uma solução da equação: $P(x,y)\frac{dx}{dy}+Q(x,y)=0$. Esta simetria entre as variáveis é uma das razões pelas quais é preferível usar a forma diferencial (5), no estudo de equações exatas.

Exemplo 3.3. *Consideremos novamente a equação* $4xy+2x^2\frac{dy}{dx}=0$ *Como* $\Phi(x,y)=2x^2y$. *é uma integral primeira, as soluções são dadas implicitamente, pelas curvas* $2x^2y=c$. *Resolvendo para* y, *obtemos as soluções explícitas* $y=\frac{c}{x^2}$. *Notemos que, nesta forma, as soluções não estão definidas para* $x=0$. *Resolvendo para* x, *obtemos* $x=\pm\sqrt{\frac{c/2}{y}}$ *que, agora, não estão definidas para* $y=0$.

Duas questões importantes são:

- Como saber se a equação é exata?
- Sabendo que é exata, como encontrar o potencial?

Para a primeira, temos o seguinte critério:

Proposição 3.4. *Suponhamos que a equação* (5) *seja exata e* P *e* Q *são de classe* C^1. *Então* $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Prova. Nesse caso, o potencial Φ é de classe C^2 e segue do teorema de Schwartz que $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. $\square$.

Quanto à segunda questão, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases}\frac{\partial \Phi}{\partial x}=P\\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}=Q\end{cases} \tag{4}$$

Vamos ilustrar o procedimento em um exemplo

Exemplo 3.5. *Encontrar a solução geral da equação:* $y\,dx+(x+\frac{2}{y})\,dy=0$

3.1. **Equações de variáveis separáveis.** Um caso particular especialmente simples é o de *equações com variáveis separadas*:

$$P(x)\,d\,x + Q(y)\,d\,y = 0, \tag{5}$$

P e Q definidas em intervalos abertos. Neste caso, $\Phi(x,y) = \int P(x)\,d\,x + \int Q(y)\,d\,y$ é uma integral primeira e as soluções são dadas implicitamente por: $\int P(x)\,d\,x + \int Q(y)\,d\,y = C \leftrightarrow \int P(x)\,d\,x = -\int Q(y)\,d\,y + C$.

Ou seja, escrevendo a equação na forma $P(x)\,d\,x = -Q(y)\,d\,y$, basta integrar os dois lados da equação em relação às variáveis x e y, respectivamente.

Exemplo 3.6. *Encontrar a solução geral da equação:* $\ln x \cos y d\,x + x tg\ \ y \sec y\,d\,y = 0$