MAP2110 - Notas de aula e exercícios

Determinantes

Saulo R. M. Barros

Departamento de Matemática Aplicada - IME-USP

Determinantes, dependência linear e sistemas:

Considere um sistema linear $Ax = b$ com $A_{n \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$.

Quando há solução do sistema?

Se denominarmos por $A_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ as colunas de A,

podemos equivalentemente escrever o sistema como:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = b$$

Ou seja, determinar a solução de $Ax = b$ equivale a obter uma combinação linear das colunas de A expressando o vetor b.

Caso as colunas de A sejam vetores L.I., teremos que elas formam uma base de $\mathbb{R}^n$. Neste caso, qualquer que seja o vetor b do $\mathbb{R}^n$, este se expressa de forma única como combinação linear das colunas de A. Por outro lado, caso as colunas de A sejam vetores L.D., o espaço gerado por eles terá dimensão no máximo igual a $n-1$. Se b não pertencer ao espaço gerado pelos vetores coluna de A o sistema não terá solução. Caso b pertença ao espaço gerado pelas colunas de A, como estas são L.D., haverá infinitas formas de escrever b como combinação linear destes vetores, tendo o sistema linear infinitas soluções.

Como identificamos a independência linear das colunas de A através do determinante, temos que:

se $\det A \neq 0$ o sistema possui solução única

e se $\det A = 0$ então $\begin{cases} \text{ou não há solução} \\ \text{ou há infinitas soluções.} \end{cases}$

Obs: a) Se o sistema é homogêneo $(b=0)$ sempre existe solução.

Neste caso: $\det A \neq 0 \iff$ a solução é única.

b) A é invertível $\iff \det A \neq 0$.

Algoritmo para o cálculo de det A

sinal = 1

Para $k = 1$ a $n-1$ faça

Se $a_{kk} = 0$ então caso exista $i_k > k$ com $a_{i_k,k} \neq 0$

troque linhas k e i_k, sinal = - sinal

senão $\det A = 0$ pare.

Para $i = k+1$ a n faça

$m_i = a_{i,k} / a_{kk}$

Para $j = k$ a n faça

$a_{i,j} = a_{i,j} - m_i * a_{k,j}$

$$\det A = \left(\prod_{i=1}^{n} a_{ii}\right) \times \text{sinal}$$

Quantidade de operações : $O(n^3)$

n	5	10	20
n^3	125	1000	8000
$n!$	120	3.628.800	$2.4... * 10^{18}$

$\longleftarrow$ Laplace inviável !

Exemplo :

Calcular o determinante da matriz: (sinal = 1)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{sinal}=-1}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Portanto $\det A = -(-1 \times -1 \times 2 \times -12) = 24$. Colunas de A são L. I.

Logo, formam base de $\mathbb{R}^4$.

2º exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$A_4 = 3A_1 + A_2 + A_3$

e $\det A = 0$

Matrizes Elementares:

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (i \neq j)$$

A matriz elementar de permutação E_{ij} é a matriz obtida permutando-se a linha i e a linha j da Identidade.

Se calcularmos $E_{ij}A$ obtemos a matriz A com linhas i e j permutadas.

Calculando AE_{ij} permutamos as colunas de A.

A matriz $E_i(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz identidade com a linha i multiplicada por c.

$(E_i(c)A)$ multiplica a i-ésima linha de A por c.

Definimos ainda $E_{i,k}(c) = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \cdots & c & \cdots 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ $(i \neq k)$ é a matriz identidade em que apenas modificamos a posição i,k da matriz, trocando 0 por c.

$(E_{i,k}(c)A)$ adiciona a k-ésima linha multiplicada por c à i-ésima linha de A!

O processo de escalonamento de uma matriz A, pode ser representado através de uma sequência de produtos do tipo:

$E_\ell E_{\ell-1} \cdots E_1 A$, onde as matrizes E_i são matrizes elementares como as descritas acima.

Note que: $\det E_{ij} = -1$ (se $i \neq j$), $\det E_i(c) = c$ e $\det E_{i,k}(c) = 1$.

Além disso, como já vimos as propriedades de determinantes, observemos que:

$$\det(E_{ij}A) = -\det A = \det(E_{ij})\det A.$$

$$\det(E_i(c)A) = c\det A = \det(E_i(c))\det A$$

$$\det(E_{i,k}(c)A) = \det A = \det(E_{i,k}(c))\det A.$$

Ao escalonarmos A não singular, ou seja com $\det A \neq 0$, chegaremos a uma matriz triangular com diagonal não nula. Ainda através de moltiplicação por matrizes elementares, podemos chegar à matriz identidade.

Representando:

$$E_m E_{m-1} \cdots E_1 A = I$$

com $\det I = 1 = \left(\prod_{i=1}^{m} \det E_i\right) \det A$.

Exemplo:

$$A = \begin{array}{c} \\ 2 \\ -1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Até aqui, nossas operações correspondem a:

$$E_{3,2}(3)\, E_{3,1}(-1)\, E_{2,1}(2)\, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Continuamos, rumo à identidade...

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Todo o processo é então representado por:

$$\underbrace{E_{1,2}(-2)\, E_{1,3}(-2)\, E_{2,3}(-3)\, E_3(1/7)\, E_{3,2}(3)\, E_{3,1}(-1)\, E_{2,1}(2)}\, A = I$$

$E_7 E_6 \ldots E_1 A = I$ com $\det\left(\prod_{i=1}^{7} E_i\right) = 1/7$, $\det A = 7$, $\det I = 1$.

Estamos agora em condições de mostrar o seguinte resultado sobre determinantes:

Teor: Sejam A e B duas matrizes $n \times n$.

Então: $$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Dem: Inicialmente observamos que as matrizes elementares são invertíveis, com $E_{ij}^{-1} = E_{i,j}$, $E_i^{-1}(c) = E_i(1/c)$ (com $c \neq 0$) e $E_{i,k}^{-1}(c) = E_{i,k}(-c)$

Ao escalonarmos A, obtemos $E_\ell \cdot E_{\ell-1} \cdots E_1 A = U$ onde U é uma matriz triangular superior e as matrizes E_i são as matrizes elementares representando o processo de triangularização.

Separemos em dois casos:

a) $\det A = 0$. Neste caso a matriz triangular U tem determinante 0 com a última linha de U igual a zero (através de escalonamento podemos reduzir U a este formato).

Sendo $E = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_\ell^{-1}$ a inversa do produto $E_\ell E_{\ell-1} \cdots E_1$ obtemos que

$A = EU$ e Assim $AB = EUB$.

Logo $\det(AB) = \det(E_1^{-1} \cdots E_\ell^{-1} UB) = \left(\prod_{i=1}^{\ell} \det E_i^{-1}\right) \det(UB)$ pois as (E_i^{-1}) são matrizes elementares. Mas se a última linha de U é nula então também a última linha de UB será nula. Logo $\det(UB) = 0$ e consequentemente $\det(AB) = 0$. Logo $0 = \det A \cdot \det B = \det(AB)$, concluindo a demonstração neste caso.

b) $\det A \neq 0$. Neste caso podemos continuar aplicando transformações elementares à matriz U até obtermos a identidade:

$E_m \cdot E_{m-1} \cdots E_1 A = I$ e pto $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_m^{-1}$

Assim $\det(AB) = \det(E_1^{-1} \cdots E_m^{-1} B) = \left(\prod_{i=1}^{m} \det E_i^{-1}\right) \det B = \det A \cdot \det B$ concluindo a prova.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 7 & 14 \end{bmatrix}$ Verifique que $\det A = 1$, $\det B = -8$ e $\det(AB) = -8$.