Prova de Geofísica Matemática

09 de julho de 2020

Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas
Universidade de São Paulo
Departamento de Geofísica

1. (2 pontos) Uma barra de metal de comprimento L possui temperatura inicial $u(x,0) = f(x)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } 0 < x < L/2 \\ x - L & \text{se } L/2 < x < L \end{cases}$$

Sendo que a temperatura nas extremidades da barra é mantida em zero e considerando que a temperatura varia no tempo seguindo a equação de difusão $u_t = cu_{xx}$, determine $u(x,t)$. (Solução geral para $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-c\frac{k^2\pi^2}{L^2}t}$$

onde os D_k's representam os coeficientes b_k's da série de Fourier para a função $f(x)$ com período $p = 2L$, considerando que podemos estender a $f(x)$ como uma função ímpar entre $-L$ até L.)

2. (2 pontos) Dada a seguinte equação diferencial:

$$A\frac{\partial^4 u(x)}{\partial x^4} + B\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + Cu(x) = Dh(x)$$

e assumindo que A, B, C e D são constantes, escreva a transformada de Fourier de $u(x)$ em função da transformada de Fourier de $h(x)$.

3. (2 pontos) Qual é a transformada de Fourier de $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{se} \quad x < 0 \quad (a > 0) \\ 0 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$?

4. (2 pontos) Sabendo que $\mathcal{F}(e^{iax}) = \sqrt{2\pi} \cdot \delta(w-a)$, sendo que δ é o Delta de Dirac, determine $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}[\delta(w+4) - \delta(w-4)]\right)$.

5. (2 pontos) Através das propriedades do Delta de Dirac vistas em aula, calcule a transformada de Fourier da função

$$f(x) = 2 + 3\cos(x) - 4\sin(2x)$$