Desenvolvimento do Campo de Radiação em Multipolos II

[J. Frenkel; Princípios da Electrodinâmica Clássica. Cap. 5]

[J.D. Jackson; Classical Electrodynamics, Chap.9]

Fontes Monocromáticas Fixas

$$\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})e^{-i\omega t}; \quad \vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

Desenvolvimento do potencial vetor

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r})e^{-i\omega t}; \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_n \frac{(-ik)^n}{n!}\int \vec{j}(\vec{r}')\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}\right)^n dV'$$

Contribuições para $n = 1$:

$$\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}'\right)\vec{j} = \underbrace{\frac{1}{2}(\vec{r}'\times\vec{j})\times\frac{\vec{r}}{r}}_{\text{dipolo magnético}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{j}\right)\vec{r}' + \left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}'\right)\vec{j}\right]}_{\text{quadrupolo elétrico}}$$

Quadrupolo elétrico

A contribuição da parte simétrica do integrando, $(\vec{r}\cdot\vec{r}'/r)\vec{j}$, que leva ao quadrupolo, fica

$$\vec{A}_{qd}(\vec{r}) = -ik\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\frac{1}{2}\int\left[(\hat{n}\cdot\vec{r}')\vec{j}(\vec{r}') + \left(\hat{n}\cdot\vec{j}(\vec{r}')\right)\vec{r}'\right]dV'; \qquad \hat{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

O integrando pode ser expresso de uma forma mais conveniente usando outro artifício de cálculo vetorial. Vamos representa-lo pelo vetor

$$\vec{Z} = \frac{1}{2}\left[(\hat{n}\cdot\vec{r}')\vec{j}(\vec{r}') + \left(\hat{n}\cdot\vec{j}(\vec{r}')\right)\vec{r}'\right]$$

A componente i desse vetor é dada por

$$Z_i = \frac{1}{2}\sum_{\ell} n_\ell[x'_\ell j_i + x'_i j_\ell]$$

onde n_ℓ é o cosseno diretor do versor $\hat{n}$ na direção ℓ. Por outro lado,

$$\nabla'\cdot(x'_i x'_\ell \vec{j}) = x'_i x'_\ell \nabla'\cdot\vec{j} + \vec{j}.\nabla'(x'_i x'_\ell) = x'_i x'_\ell(i\omega\rho) + x'_\ell j_i + x'_i j_\ell$$

Integrando esta expressão em todo espaço, e utilizando o teorema de Gauss, temos

$$0 = i\omega \int x_i' x_\ell' \rho(\vec{r}') dV' + \int [x_\ell' j_i + x_i' j_\ell] dV'$$

Portanto

$$\int \vec{Z} dV' = \sum_i \hat{e}_i \frac{1}{2} \sum_\ell n_\ell \int [x_\ell' j_i + x_i' j_\ell] dV' = -i\omega \sum_i \hat{e}_i \frac{1}{2} \sum_\ell n_\ell \int x_i' x_\ell' \rho(\vec{r}') dV'$$

$$= -i\frac{\omega}{2} \int \vec{r}'(\hat{n} \cdot \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$$

Portanto, a componente quadrupolar do potencial vetor fica

$$\boxed{\vec{A}_{qd}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 c k^2}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{r}'(\hat{n} \cdot \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'}$$

Esta expressão corresponde à equação 9.38 do Jackson, na zona de radiação ($kr \gg 1$).

Podemos expressar o potencial em termos do momento de quadrupolo, definido por

$$\overleftrightarrow{Q} = \int \left[3\vec{r}'\vec{r}' - \overleftrightarrow{I}r'^2\right]\rho(\vec{r}')dV' \;\rightarrow\; Q_{ij} = \int \left(3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij}\right)dV'$$

Fazendo o produto escalar com $\hat{n}$

$$\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n} = 3\int \vec{r}'(\hat{n}\cdot\vec{r}')\rho(\vec{r}')dV' - \hat{n}\int r'^2\rho(\vec{r}')dV' \qquad \left(\overleftrightarrow{I}\cdot\hat{n} = \hat{n}\right)$$

Portanto

$$\vec{A}_{qd}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 c k^2}{8\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\left[\frac{\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n}}{3} + \frac{1}{3}\hat{n}\int r'^2\rho(\vec{r}')dV'\right]$$

Campo magnético

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{A}_{qd} = \left(-\frac{\mu_0 c k^2}{8\pi}\right)\left[\nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\times\frac{\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n}}{3} + \nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\times\frac{1}{3}\hat{n}\int r'^2\rho(\vec{r}')dV'\right]$$

Mas

$$\nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = ik\frac{e^{ikr}}{r}\hat{n} - \frac{e^{ikr}}{r^2}\hat{n} \approx ik\frac{e^{ikr}}{r}\hat{n} \implies \nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\times\hat{n} = 0$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \left(-\frac{i\mu_0 ck^3}{24\pi}\right)\frac{e^{ikr}}{r}\hat{n}\times\left[\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n}\right]; \;\; \vec{E}(\vec{r}) = c\vec{B}(\vec{r})\times\hat{n}$$

O vetor de Poynting médio fica

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2\mu_0}Re\left[\vec{E}\times\vec{B}^*\right] = \frac{Z_0}{2}\left(\frac{ck^3}{24\pi r}\right)^2\left[\hat{n}\times\left(\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n}\right)\times\hat{n}\right]\times\left[\hat{n}\times\left(\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n}\right)\right]$$

Os produtos vetoriais podem ser simplificados utilizando a identidade $\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\times\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$, com $\vec{a} = \vec{c} = \hat{n}\times\left(\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n}\right)$; $\vec{b} = \hat{n}$. O resultado fica

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{c^2 Z_0}{1152\pi^2 r^2}k^6\left|\hat{n}\times\left(\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n}\right)\right|^2\hat{n}$$

Essa expressão é mais útil quando expressa nas componentes de $\overleftrightarrow{Q}$.

Usando a relação vetorial $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$, temos

$$\left|\hat{n}\times(\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n})\right|^2 = [\hat{n}\times(\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n})]\cdot[\hat{n}\times(\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n})]$$
$$= (\hat{n}\cdot\hat{n})\left[(\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n})\cdot(\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n})\right] - \left[\hat{n}.(\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n})\right]\left[(\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n})\cdot\hat{n}\right] = \left|\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n}\right|^2 - \left|\hat{n}.(\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n})\right|^2$$

Explicitando $\overleftrightarrow{Q}$ em termos de sua representação cartesiana

$$\overleftrightarrow{Q} = \sum_{\alpha,\beta} Q_{\alpha\beta}\hat{e}_\alpha\hat{e}_\beta \therefore \overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n} = \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}n_\beta\hat{e}_\alpha \rightarrow \left|\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n}\right|^2 = \left(\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}n_\beta\hat{e}_\alpha\right)\cdot\left(\sum_{\delta\gamma} Q_{\delta\gamma}n_\gamma\hat{e}_\delta\right)$$

$$\left|\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n}\right|^2 = \sum_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta}Q_{\alpha\gamma}n_\beta n_\gamma$$

$$\hat{n}\cdot(\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n}) = \hat{n}\cdot\sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}n_\beta\hat{e}_\alpha = \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta \;\therefore\; \left|\hat{n}\cdot(\overleftrightarrow{Q}\cdot\hat{n})\right|^2 = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} Q_{\alpha\beta}Q_{\gamma\delta}n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta$$

O vetor de Poynting fica então

$$\boxed{\langle S\rangle = Z_0 \frac{c^2k^6}{1152\pi^2 r^2}\left[\sum_{\alpha\beta\gamma} Q_{\alpha\beta}Q_{\alpha\gamma}n_\beta n_\gamma - \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} Q_{\alpha\beta}Q_{\gamma\delta}n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta\right]\hat{n}}$$

Para calcular a potência total radiada, temos que integrar o vetor de Poynting do elemento de área $d\vec{A} = r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi \hat{n}$. As componentes do momento de quadrupolo saem fora da integral, pois são constantes. Portanto, a integral vai envolver somente os cossenos diretores de

$$\hat{n} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{e}_y + \cos\theta\,\hat{e}_z$$

<u>Exercício</u>

Faça as integrais sobre o ângulo sólido dos dois termos na expressão de $\langle S\rangle$ e obtenha os resultados dados na equação 9.47 do Jackson.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} n_\beta n_\gamma \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi}{3}\delta_{\beta\gamma}; \int n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta d\Omega \; = \frac{4\pi}{15}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}\right)$$

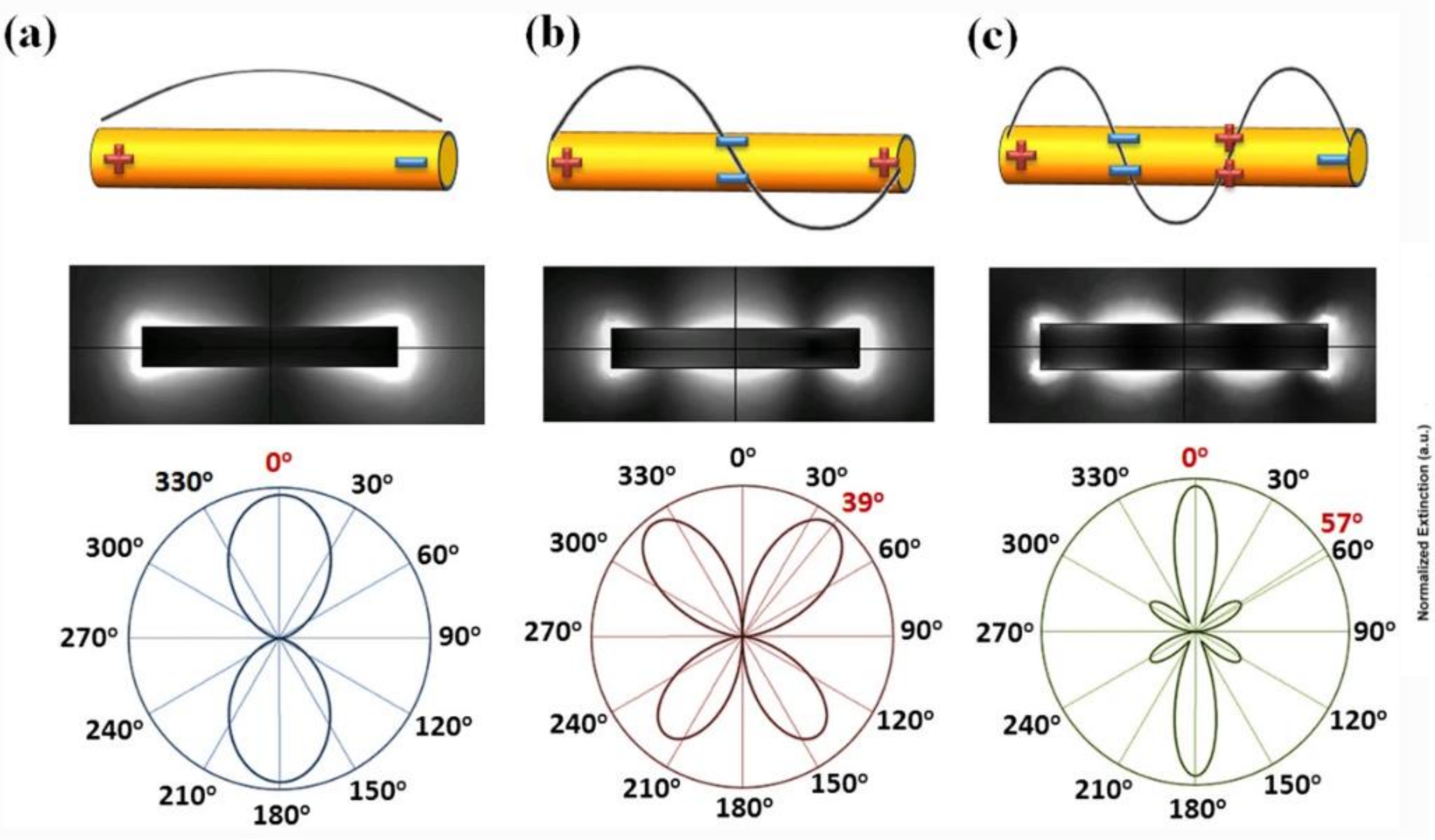
Usando os resultados dessas integrais, obtemos

$$P = \int \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{A} = Z_0 \frac{c^2 k^6}{1152\pi^2} \frac{4\pi}{3} \left[\sum_{\alpha\beta} \left| Q_{\alpha\beta} \right|^2 - \frac{1}{5} \left(\sum_{\alpha} Q_{\alpha\alpha} \sum_{\beta} Q_{\beta\beta} + 2 \sum_{\alpha\beta} \left| Q_{\alpha\beta} \right|^2 \right) \right]$$

Mas, da definição de $\overleftrightarrow{Q}$, temos que $\sum_{\alpha} Q_{\alpha\alpha} = 0$; portanto

$$\boxed{P = \frac{c^2 k^6}{1440\pi} \sum_{\alpha\beta} \left| Q_{\alpha\beta} \right|^2}$$

Aplicação Moderna: Yong et al; Nanoscale Research Letters 9,187 (2014)



Propriedades de extinção de um nano-bastão de ouro em água