Série de Exercícios 7

1. Em aula passada definimos a convolução de duas funções e mostramos que sua transformada de Fourier é proporcional ao produto das transformadas das duas funções.

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')H(t')dt'\right] = \sqrt{2\pi}g(\omega)h(\omega);$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(t)e^{i\omega t}dt; h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{i\omega t}dt$$

Considere agora a transformada de Fourier do produto de duas funções temporais

$$\mathcal{F}[G(t)H(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(t)H(t)e^{i\omega t}\,dt$$

Substitua as expressões para as transformadas inversas, por exemplo, $G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega')e^{-i\omega' t}d\omega'$, faça primeiro a integral no tempo, e mostre que

$$\mathcal{F}[G(t)H(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega')g(\omega-\omega')d\omega'$$

---

2. A partir das expressões gerais para os campos elétrico e magnético derivadas dos potenciais de Liénard-Wiechert, calcule os campos para uma carga em movimento uniforme (exemplo6.3 do Bo Thidé). Compare esse método com o utilizado no problema 3 da Segunda Série de exercícios para derivar o mesmo resultado.

---

3. Utilizando as expressões obtidas em aula para $(\nabla s)_{t'}$ e $(\partial s/\partial t')_{\vec{r}}$, faça detalhadamente todos os cálculo para obter as expressões para o campo elétrico e campo magnético, a partir dos potenciais de Liénard-Wiechert.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{s^3}\left(\vec{R}-R\vec{\beta}\right)(1-\beta^2)\right]_{ret} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\frac{1}{s^3}\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-R\vec{\beta}\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right]_{ret}$$

e

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\left[\frac{\vec{R}}{R}\right]_{ret}\times\vec{E}(\vec{r},t)$$

---

4 Utilizando o formalismo apresentado na derivação dos campos produzidos por cargas em movimento, mostre que

$$\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-R\vec{\beta}\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}_{ret}^2 = \left[-\left(\dot{\vec{v}}_q\cdot\vec{R}\right)^2R^2(1-\beta^2) + \dot{\vec{v}}_q^2R^4\left(1-\frac{\vec{R}\cdot\vec{\beta}}{R}\right)^2\right]_{ret}$$

5. Obtenha a expressão total radiada por uma carga acelerada. Para isso, faça a integral considerando o ângulo sólido referenciado à velocidade da carga. Portanto, o ângulo θ fica o ângulo polar. O eixo z pode ser considerado como o eixo de referência para medir o ângulo azimutal. Portanto, o ângulo sólido fica $d\Omega = d\alpha \sin\theta \, d\theta$. O ângulo φ pode ser referenciado aos outros dois ângulos, isto é, $\cos\varphi = \cos\theta / \sin\alpha$. Assim, o integrando será

$$\frac{(1-\beta\sin\alpha\cos\varphi)^2 - (1-\beta^2)(\sin\alpha\sin\varphi)^2}{(1-\beta\sin\alpha\cos\varphi)^5} d\Omega$$
$$= \frac{(1-\beta\cos\theta)^2 - (1-\beta^2)[(\sin\alpha)^2 - (\cos\theta)^2]}{(1-\beta\cos\theta)^5} \sin\theta \, d\alpha d\theta$$

Mostre que a potência total radiada é

$$P = \frac{dU}{dt'} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left[\frac{\dot{v}_q^2}{(1-\beta^2)^2}\right]_{ret} = \frac{2}{3}\left(\frac{\omega_0^2 r_0}{c}\right)\beta^2\gamma^4; \;\; r_0^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2},$$

onde r_0 é o "raio clássico" do elétron.

---

6. Faça o cálculo detalhado para obter a expressão do campo elétrico de radiação produzido por um dipolo elétrico (Jackson; eq. 9.18):

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 (\hat{n}\times\vec{p})\times\hat{n}\frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r}.$$

7, Fazendo o cálculo direto, e não analogias como sugere o Jackson, obtenha as expressões para os campos de radiação produzido por um dipolo magnético.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{Z_0}{4\pi} k^2 \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r}(\hat{n}\times\vec{m}); \; \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} k^2 \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r}(\hat{n}\times\vec{m})\times\hat{n}$$

(No cálculo, lembre-se que $\vec{m}$ é um vetor constante)

---

8. Problema 9.6, capítulo 9, do livro do Jackson.

---

9. Problemas do capítulo 5 do livro do Frenkel: 5, 8, 10 e 11

---

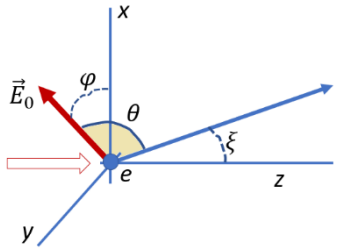
10. Problema do capítulo 8 do livro do Frenkel: 8

---

11. <u>Espalhamento Thomson não-relativístico</u>

Quando uma onda plana incide sobre um elétron, este oscila no campo da onda, formando um dipolo oscilante, e, portanto, radia outra onda electromagnética. Este processo é denominado Espalhamento Thomson.

a) Considere uma onda plana propagando-se na direção z, com o campo elétrico $\vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)}$ no plano (x, y), formando um ângulo φ com o eixo x, conforme mostra a figura. O ângulo θ fornece a direção da onda espalhada com relação ao campo incidente. Mostre que, para elétrons não-relativísticos, a densidade de carga correspondente é dada por



$$\rho(\vec{r}, t) = e\delta\left(\vec{r} + \frac{e}{m\omega^2}\vec{E}_0 \cos \omega t\right)$$

b) Mostre que o vetor de Poynting da radiação emitida é dado por

$$\langle \vec{S} \rangle = Z_0 \frac{c^2 k^4}{32\pi^2 r^2} \frac{e^4}{m^2 \omega^4} E_0^2 (\sin\theta)^2 \hat{n}$$

c) Considere a radiação emitida no plano (x, z). Mostre que $\cos\theta = \cos\varphi \sin\xi$ e, usando este resultado, calcule a média do vetor de Poynting com relação ao ângulo de polarização, obtendo

$$\overline{\langle \vec{S} \rangle} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle \vec{S} \rangle \, d\varphi = Z_0 \frac{c^2 k^4}{32\pi^2 r^2} p^2 \left(1 - \frac{1}{2}(\sin\xi)^2\right) \hat{e}_z$$

onde $\vec{p}$ é o momento de dipolo correspondente ao elétron oscilante.

d) A seção diferencial para espalhamento Thomson é definida como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\overline{\langle \vec{S}_0 \rangle}} \frac{dP}{d\Omega}$$

onde $\langle \vec{S}_0 \rangle$ é o vetor de Poynting médio correspondente à onda incidente. Mostre que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}(\sin\xi)^2\right); \; \sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2}\right)^2$$