Grupos e Álgebras de Lie e Teoria de Representação - 7600052 (Graduação)
Teoria dos Grupos - SFI 5823 (Pós-Graduação)

Trabalho Substitutivo - 08/07/2020

Entrega: 15/07/2020

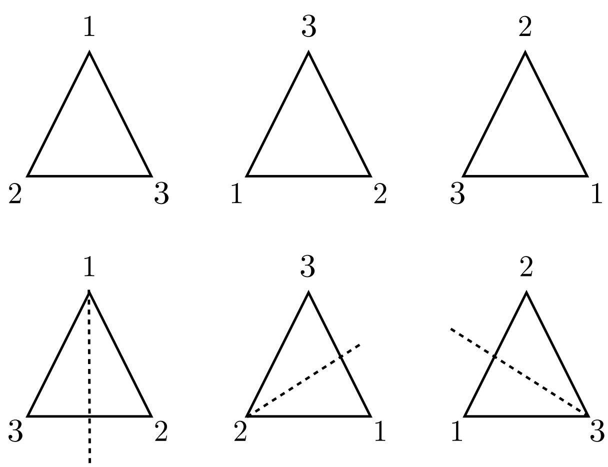
1. **(1,5)** Considere as transformações (rotações e reflexões) que deixam um triângulo equilátero invariante, conforme mostrado na figura abaixo.

   (a) Mostre que tais transformações formam um grupo e determine sua estrutura (tabela de multiplicação ou isomorfismo a um grupo conhecido).

   (b) Calcule as matrizes de uma representação de dimensão 3 deste grupo baseada nas transformações do triângulo.

   (c) Calcule os caracters dos elementos deste grupo nesta representação.

   (d) Tal representação é irredutível?



2. **(1,5)** Considere o seguinte conjunto de vetores em um espaço Euclideano de dimensão 4, dados por (12 vetores)

$$\pm\left(\vec{e}_i - \vec{e}_j\right) \text{ para } i \neq j \;; \qquad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \;; \qquad i, j = 1, 2, 3, 4$$

   Verifique se este conjunto de vetores constitui um sistema de raízes de uma álgebra de Lie. Justifique sua resposta. No caso afirmativo, determine o conjunto de raízes simples e construa a matriz de Cartan e o diagrama de Dynkin.

   Note que: $\left(\vec{e}_i - \vec{e}_j\right) \cdot \sum_{k=1}^{4} \vec{e}_k = 0$

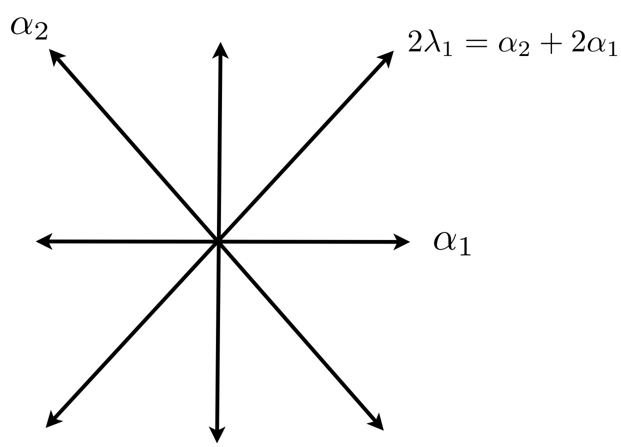
3. **(1,5)** Considere a representação irredutível de $SO(5)$ cujo peso máximo é $2\,\lambda_1$ (veja diagrama abaixo).

   (a) Calcule a dimensão desta representação.

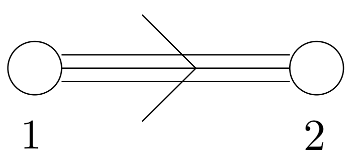
   (b) Calcule os pesos desta representação.

   (c) Calcule as multiplicidades destes pesos.

   (d) Decomponha esta representação em representações irredutíveis da subalgebra $SU(2)$ associada à raiz α_1, gerada por $H_{\alpha_1} = \frac{2\alpha_1 \cdot H}{\alpha_1^2}$, E_{α_1} e $E_{-\alpha_1}$.



4. **(1,0)** Considere o seguinte diagrama de Dynkin

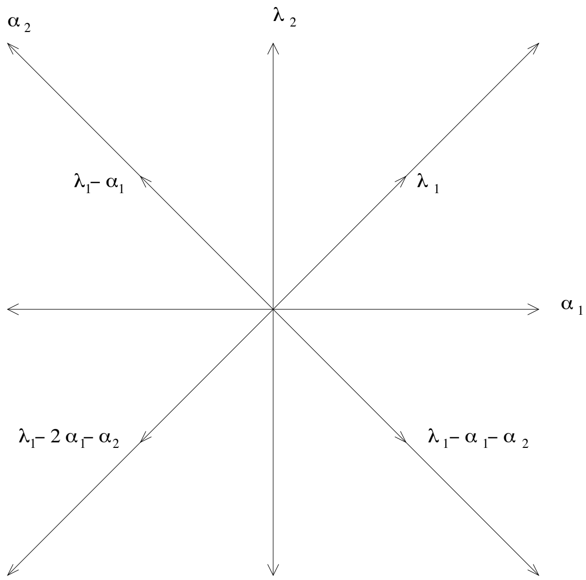


   (a) Construa a matriz de Cartan associada a este diagrama (note a numeração dos vértices do diagrama).

   (b) Construa todas as raízes da álgebra de Lie associada.

   (c) Qual o rank e dimensão desta álgebra?

5. **(1,5)** Calcule o caráter do elemento $g = \exp\left(i\left(\theta_1\, H_{\alpha_1} + \theta_2\, H_{\alpha_2}\right)\right)$ do grupo $SO(5)$, na representação de dimensão 4, cujo peso máximo é λ_1 (veja figura abaixo), e onde $H_{\alpha_a} = \frac{2\alpha_a \cdot H}{\alpha_a^2}$, $a = 1, 2$, são os geradores da subálgebra de Cartan na base de Chevalley. Os caráters são reais ou complexos? (Dica: voce pode usar a fórmula de Weyl ou então calcular diretamente a partir da definição de caráter)



6. **(1,5)** Considere a álgebra de Lie com uma base R, P_1 e P_2 satisfazendo as relações de comutação

$$[R\,,\,P_1] = P_2\;; \qquad [R\,,\,P_2] = -P_1\;; \qquad [P_1\,,\,P_2] = 0$$

   (a) Encontre uma subálgebra de Cartan para esta álgebra de Lie.

   (b) Construa as matrizes da representação adjunta desta álgebra.

   (c) Calcule a forma de Killing desta álgebra.

   (d) Pelo critério de Cartan esta álgebra é semisimples?

   (e) Ela possui subálgebra invariante? Se sim, mostre os geradores dela, e diga se é abeliana ou não.

7. **(1,5)** Considere um sistema físico que tem o grupo $SU(3)$ como grupo de simetria e onde a energia é dada pelo operador quadrático de Casimir do grupo $SU(3)$, i.e. $\mathcal{H} = C_2^{(D)}$. Com isso queremos dizer que existem transformações atuando nos estados do sistema que formam uma representação D do grupo $SU(3)$, neste espaço de estados. Obviamente, estados conectados por transformações de $SU(3)$ têm a mesma energia, i.e.

$$|\psi_1\rangle = D\,(g)\,|\psi_0\rangle \quad \rightarrow \quad \mathcal{H}\,|\psi_1\rangle = E\,|\psi_1\rangle \qquad \text{e} \qquad \mathcal{H}\,|\psi_0\rangle = E\,|\psi_0\rangle$$

pois $[\mathcal{H}\,,\, D\,(g)] = 0$, com $g \in SU(3)$. A representação D, formada pelos estados do sistema, quebra em representações irredutíveis de $SU(3)$.

(a) Os estados de energias mais baixas constituem as representações, singleto, tripleto, anti-tripleto e adjunta de $SU(3)$, cujos pesos máximos são respectivamente $\lambda = 0$, $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ e $\lambda = \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$. Calcule as energias $\mathcal{H}$ destes estados, e a degenerescência destas energias.

(b) Suponha que um campo externo é aplicado ao sistema, quebrando a simetria $SU(3)$, e levando a uma energia da forma

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \varepsilon\, D\,(\delta \cdot H)$$

onde $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha = \lambda_1 + \lambda_2 = \alpha_3$, e onde ε é um parâmetro muito pequeno. Calcule a energia $\mathcal{H}'$ dos estados que pertencem às representações singleto, tripleto e anti-tripleto. (Estamos assumindo que os estados em ordem ε de perturbação são os mesmos do sistema não perturbado)