Gabarito - Provinha C

Cálculo - FAU

Monitora - Juliane Trianon Fraga

Exercício C 1:

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $(|f(x)| - |g(x)|)^2 \geq 0$ e portanto

$$f(x)^2 - 2|f(x)g(x)| + g(x)^2 \geq 0,$$

ou seja,

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{f(x)^2 + g(x)^2}{2} = 3.$$

Sendo assim, a função $f(x)g(x)$, definida nos reais, é limitada. Agora, como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sec\, x - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\cos x} \cdot \frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x\cos x(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen }^2 x}{x\cos x(1+\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{\text{sen } x}{\cos x(1+\cos x)} \right) = 1 \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x\to 0} \left[f(x)g(x) \left(\frac{\sec\, x - 1}{x} \right) \right] = 0.$$

Erros mais comuns:

1. Esquecer-se completamente de que é necessário que a função seja limitada para aplicar o resultado. (Desconto de 1 ponto)

2. Explicar incorretamente o porquê da função ser limitada. (Desconto de 0.4 ponto)

3. Separar o limite original como produto dos limites. Isso é errado porque não sabemos a priori nem se o limite de $f(x)g(x)$ existe ou se tende a $\pm\infty$. (Desconto de 0.7 ponto)

4. Afirmar direto que o limite só pode ser não-nulo se $f(x)g(x)$ tender a $\pm\infty$. Isso não é verdade pois sequer sabemos que esse limite existe. (Desconto de 0.4 ponto)

5. Igualar uma função a um limite ou calcular o valor e esquecer de tirar o símbolo do limite da frente. (Desconto de 0.2 ponto)

6. Erros de conta/expressões/imprecisões de escrita (Desconto de 0.1 ponto)

7. Errar completamente o cálculo do limite da direita. (Desconto de 1.5 ponto)

8. Errar parcialmente o cálculo do limite da direita. (Desconto de 1 ponto)

9. De alguma forma errada, concluir que o limite de $f(x)g(x)$ quando x tende a 0 existe. Isso implicaria na possibilidade de separar o limite em produto, e nem precisaria utilizar o teorema do confronto. (Desconto de 1.7 ponto)

Exercício C 2:

(a) Para $x \neq -\frac{1}{2}$, considere a função $f(x) = 2x + 2 = u$. Então $2x + 1 = u - 1$, de forma que, para todo $x \neq \frac{1}{2}$,

$$\frac{\sqrt[3]{2x+2} - 1}{2x+1} = \frac{\sqrt[3]{u} - 1}{u - 1} = \frac{\sqrt[3]{u} - 1}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{1}{u^2+u+1} \doteq g(u) = g(f(x)),$$

em que g é uma função definida para $u \neq 1$.

Portanto,

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{2x+2} - 1}{2x+1} = \lim_{u \to 1} \frac{1}{u^2+u+1} = \frac{1}{3}$$

e

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{2x+2} - 1}{2x^2+x} = \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{2x+2} - 1}{2x+1} \cdot \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = -\frac{2}{3}.$$

(b) Para todo $x > 0$,

$$\frac{\sqrt[4]{2x^4+x^2+2}}{\sqrt[3]{3x^3+x+5}} = \frac{x}{x} \cdot \frac{\sqrt[4]{2+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}}{\sqrt[3]{3+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}} = \frac{\sqrt[4]{2+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}}{\sqrt[3]{3+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{2x^4+x^2+2}}{\sqrt[3]{3x^3+x+5}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{2+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}}{\sqrt[3]{3+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[4]{2+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}}{\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{3+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{3}}.
\end{aligned}$$

(c) Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$2x - \sqrt[3]{2x^3-2x} = x \cdot \left(2 - \sqrt[3]{2-\frac{2}{x^2}}\right).$$

Como

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty$$

e

$$\lim_{x\to\infty} \left(2 - \sqrt[3]{2-\frac{2}{x^2}}\right) = 2 - \sqrt[3]{2} > 0,$$

concluímos que

$$\lim_{x\to\infty} (2x - \sqrt[3]{2x^3-2x}) = \infty.$$

(d) Calculemos o limite da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x^3-3x^2+4} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2(x+1)} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+2)}{(x-2)(x+1)} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+2)}{(x+1)} \cdot \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)} = \infty,
\end{aligned}
$$

pois

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{(x+2)}{(x+1)} = \frac{4}{3}$$

e

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)} = \infty.$$

Erros mais comuns:

1. Igualar uma função a um limite ou calcular o valor e esquecer de tirar o símbolo do limite da frente. (Desconto de 0.2 ponto)
2. Erros de conta/expressões/imprecisões de escrita (Desconto de 0.1 ponto)
3. Erros relativamente graves de operações com limites e funções (Desconto de 0.4 ponto)
4. Especificamente no item (d), não fatorar o (x^2-x-2) nem dar nenhuma indicação de essa função é positiva próxima de 2 pelo lado direito, e por isso tende a ∞. (Desconto de 0.8 ponto)