MAP2110 - Notas de aula e exercícios

Determinantes

Saulo R. M. Barros

Departamento de Matemática Aplicada - IME-USP

Determinantes e a regra de Laplace

Q

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \qquad \text{Ex: } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Produtos envolvendo a_{11} (com $\sigma(1)=1$, ou seja com as permutações e sinais:

$$\sigma = \underset{+}{(1,2,3,4)},\ \underset{-}{(1,2,4,3)},\ \underset{-}{(1,3,2,4)},\ \underset{+}{(1,3,4,2)}\ \underset{+}{(1,4,2,3)}\ \underset{-}{(1,4,3,2)}$$

Estes seis produtos correspondem a calcular:

$$+\begin{vmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & -3 & \\ & & & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & & & \\ & 2 & & \\ & & & 5 \\ & & 1 & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & & & \\ & & 0 & \\ & 1 & & \\ & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$0 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad + \begin{vmatrix} 0 & & & \\ & & 0 & \\ & & & 5 \\ & 1 & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & & & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & & & \\ & & & 1 \\ & & -3 & \\ & 1 & & \end{vmatrix}$$

Com $a_{1,2}$ (com $\sigma(1)=2$, ou seja com as permutações seguintes e seus sinais:

$$\sigma = \underset{-}{(2,1,3,4)},\ \underset{+}{(2,1,4,3)},\ \underset{+}{(2,3,1,4)},\ \underset{-}{(2,3,4,1)},\ \underset{-}{(2,4,1,3)},\ \underset{+}{(2,4,3,1)}$$

Os produtos correspondem ao cálculo de:

$$\begin{vmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & -3 & \\ & & & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & 5 \\ & & 1 & \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} & 1 & & \\ & & 0 & \\ 1 & & & \\ & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$-1 \cdot \det \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 5 \\ 2 & & & \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} & 1 & & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & & 1 & \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & -3 & \\ 2 & & & \end{vmatrix}$$

etc.

O Determinante de A pode ser calculado como:

$$0 \cdot \det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \det \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \det \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \det \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Definição: O Cofator de um elemento $a_{i,j}$ de uma matriz $A_{n \times n}$ é definido como $C_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A_{i,j}$, onde $A_{i,j}$ é a matriz $(n-1)\times(n-1)$ obtida a partir de A, suprimindo sua i-ésima linha e j-ésima coluna.

Exemplo: se $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ então

$$C_{1,2} = -1 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C_{2,3} = -1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C_{2,2} = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

. - - - - .

Determinante pela regra de Laplace:

Escolha linha i da matriz:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

ou escolha coluna j da matriz:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} C_{i,j}$$

Desta forma, o cálculo de $\det A$ (matriz $n \times n$) se 'reduz' ao cálculo de n determinantes de matrizes $(n-1)\times(n-1)$ (que devem ser multiplicados pelos respectivos coeficientes e somados).

A mesma ideia pode ser aplicada recursivamente no cálculo dos determinantes $(n-1)\times(n-1)$ (cada um requerendo o cálculo de $n-1$ determinantes de matrizes $(n-2)\times(n-2)$). O número total de operações para o cálculo de $\det A$ é proporcional a $n!$ A regra de Laplace apenas fornece um método organizado de avaliarmos $\det A$ pela definição.

Exemplo. Uso de Regra de Laplace.

Calcule $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Desenvolvendo pela terceira linha:

$$\det A = 0\, C_{3,1} + 2\, C_{3,2} + 0\, C_{3,3} + C_{3,4}$$

onde $C_{3,2} = -1 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = -(\tilde{C}_{1,1} + \tilde{C}_{1,2} + 0\, \tilde{C}_{1,3})$

$= -\left(\det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right)$

$= -(-3 - (0)) = 3$

e $C_{3,4} = -1 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -(\tilde{C}_{1,2} + \tilde{C}_{3,2})$

$= -\left(-\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right)$

$= 3 - 3 = 0.$

Logo, $\det A = 2.3 + 0 = 6$

Funções Multilineares anti-simétricas e o determinante

Definimos uma função $f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ vezes}} \longrightarrow \mathbb{R}$, linear em cada uma das variáveis:

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + y_i, x_{i+1}, \dots x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots x_n) + f(x_1, \dots, y_i, \dots x_n)$$

$$f(x_1, \dots, \alpha x_i, \dots x_n) = \alpha f(x_1, \dots, x_i, \dots x_n)$$

e anti-simétrica:

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots x_n)$$

Vamos agora estudar algumas propriedades que obtemos de

Caso tenhamos $f(x_1, \dots, \underbrace{y, \dots, y}_{\text{dois argumentos iguais}}, \dots x_n) = -f(x_1, \dots, y, \dots, y, \dots x_n) = 0$

devido à anti-sim

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, \alpha x_i + x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots x_n) + \alpha \underbrace{f(x_1, \dots x_i, \dots x_i, \dots x_n)}_{=0}$$

$$= f(x_1, \dots x_i, \dots x_j, \dots x_n)$$

Relação com determinante de A.

Defina $A_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ i-ésima linha de A (Poderíamos usar as colunas de A ...

e f multilinear anti-simétrica tal que $f(E_1, \dots, E_n) = 1$, onde os vetores $E_i = (0, \dots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ésima posição}}}{1}, 0, \dots 0)$ formam a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

Vamos verificar que $\det A = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$

Cada vetor A_i se escreve como $A_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_j$

Assim $f(A_1, A_2, \dots, A_n) = f\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1 j_1} E_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_{2 j_2} E_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{n, j_n} E_{j_n}\right)$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} a_{1, j_1} f\left(E_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_{2 j_2} E_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{n, j_n} E_{j_n}\right)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} a_{1 j_1} a_{2 j_2} f\left(E_{j_1}, E_{j_2}, \sum_{j_3=1}^{n} a_{3, j_3} E_{j_3}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{n, j_n} E_{j_n}\right)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n} f(E_{j_1}, \dots E_{j_n})$$

Observe agora que $f(E_{j_1}, \dots, E_{j_n}) \neq 0$ se e somente se $j_1, j_2, \dots j_n$ forem todos distintos, ou seja, se $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ for uma permutação de $(1, 2, \dots, n)$.

Neste caso, $(j_1, \dots, j_n) = \sigma(1, \dots n)$ e

$$f(E_{j_1}, \dots, E_{j_n}) = \operatorname{sgn} \sigma \quad f(E_1, \dots, E_n) = \operatorname{sgn} \sigma$$

e obtemos $f(A_1, \dots, A_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, a_{1, \sigma(1)} a_{2, \sigma(2)} \cdots a_{n, \sigma(n)}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i, \sigma(i)} = \det A.$$

Consequências Importantes: (Decorrem das propriedades de f)

- $\det A = 0 \iff$ colunas (linhas) de A são L.D.
- Se invertermos duas linhas (ou colunas) de A, seu determinante troca de sinal
- Multiplicando-se uma linha (ou coluna) de A por α, o determinante fica multiplicado por α. (segue que $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$)
- Somando-se um múltiplo de uma das linhas de A a alguma outra linha seu determinante não se altera. (vale o mesmo para colunas)

Cálculo do determinante por escalonamento:

Observação: É fácil ver que se A é triangular então
$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$
(produto dos elementos da diagonal de A!)

No escalonamento, transformamos A em matriz triangular, somando múltiplos de alguma linha a outra. Já vimos que estas operações não alteram o valor de $\det A$. Caso no processo de escalonamento sejam necessárias permutações de linhas de A, a cada troca de linhas o determinante troca de sinal. Bast contarmos o número de trocas para obtermos o determi nante de A como o produto da diagonal da matriz triangular resultante, multiplicado por $(-1)^k$, onde k é o número de trocas de linhas.

Exemplo:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \det A = -2 \cdot -3 = 6$$