Notas sobre o Guidorizzi, Calculo 1, 5ed - Semana 16 - página 272.

Artur Hideyuki Tomita

Iremos apenas fazer o básico de integração assim, faremos a descrição das páginas com os conteúdos que serão estudados. A integral de Riemann de uma função positiva é a área entre o gráfico e o eixo x. Numa função arbitrária, a área abaixo da curva é considerada área negativa.

11. Integral de Riemann.

11.1. Partição de um intervalo, 11.2. Soma de Riemann.

Aqui é mostrado como definir as aproximações de área de gráfico abaixo da curva usando retângulos.

11.3. Integral de Riemann: Definição.

As somas de Riemann, usando retângulos, são as aproximações da área entre o gráfico e o eixo x. Quando essas aproximações tem um limite, dizemos que a função é Riemann integrável. Neste caso dizemos que esse limite é a integral de a até b da função f, representada por $\int_a^b f(x)dx$. A definição é utilizada para provar os teoremas e as propriedades de integral, que nos permitirão resolver algumas funções mais complicadas. Nem toda função aparentemente simples sai pelos métodos existentes. Na prática, muita coisa é resolvida através de aproximações numéricas.

Não faremos o cálculo de nenhuma função pela definição nesta disciplina por isso, também não faremos uma discussão longa das secções acima.

Uma coisa importante sobre a notação. O cálculo de $\int_a^b f(x)dx$ pode ser pensado como caminhando de a até b e $\int_b^a f(x)dx$ seria andar no sentido oposto, indo de b até a.

Por definição teremos $\int_a^a f(x)dx = 0$ e $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

11.4. Propriedades da Integral.

É importante lembrar da tabela na página 303, mas não será necessário saber a demonstração.

11.5. Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo.

O primeiro teorema fundamental do Cálculo é importante para calcular a integral de $\int_a^b f(x)dx$ usando primitivas. Ela também justifica por que usaremos a notação $\int$ para falar de primitivas e de integral.

A prova deste teorema usa o TVM. O enunciado do Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo está na página 306. Agora já podemos calcular a integral de várias funções. Note que sempre fixamos UMA primitiva para calcular a

integral ($\int f(x)dx$ é uma família de funções) e qualquer uma delas vai dar a mesma conta (se F é uma primitiva, a outra G será da forma $G = F + k$ e então $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$). Então na escolha da F para calcular a integral de a até b, geralmente tomamos a que tem constante 0.

Para facilitar na hora de fazer conta, usaremos a notação $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$. Veja o exemplo 3 e 4, fica muito mais fácil calcular $F(b) - F(a)$ tendo a função $F(x)$ escrita antes para não precisar fazer contas em outro lugar.

No Exemplo 6, sabemos que a primitiva de $\operatorname{sen} x$ é $-\cos x$. Então para achar a primitiva de $\operatorname{sen}(2x)$, vamos derivar $-\cos(2x)$.

$[-\cos(2x)]' = 2\sin(2x)$. Assim, $\operatorname{sen}(2x) = [\frac{-\cos(2x)}{2}]'$ e a primitiva de $\operatorname{sen}(2x)$ é $\frac{-\cos(2x)}{2}$. *É importante notar que isto só funciona por que $2x$ é uma função linear e por isso $(2x)' = 2$. Não dá pra fazer isso para achar a primitiva de $\operatorname{sen}(x^2)$ por exemplo.*

O exemplo 7, também usamos a primitiva de e^x e $(-x)' = -1$.

11.6. Cálculo de áreas.

Como comentamos anteriormente, o cálculo da integral e da área são o mesmo número, quando tomamos uma função não-negativa.

Para calcular a área de funções com valores negativos, usamos a integral de $|f|$. Nesse caso, temos que encontrar as raízes de f para poder então calcular a integral sem o módulo, já que sabemos apenas as primitivas das funções sem o módulo. No exemplo 3, por exemplo, a função só muda de sinal em 0. Assim $|x^3| = -x^3$ para $x \leq 0$ e $|x^3| = x^3$ para $x \geq 0$. Assim escrevemos $\int_{-1}^{1} |x^3|dx = \int_{-1}^{0} |x^3|dx + \int_{0}^{1} |x^3|dx = \int_{-1}^{0}(-x^3)dx + \int_{0}^{1} x^3dx = -\int_{-1}^{0} x^3dx + \int_{0}^{1} x^3dx$.

No exemplo 4, temos o gráfico de duas funções e a área. A área entre a primeira função e o eixo x cobre a área da segunda função e o eixo x. Assim, a área desejada é a diferença das duas áreas. Como a diferença das integrais e a integral da diferença, é calculado a integral da diferença.

No Exemplo 5, pede-se a área limitada pelas duas funções com uma condição, e com isso é preciso primeiro encontrar os limites de integração.

O Exemplo 6 é preciso descobrir qual função está acima do outro. Pra isso basta encontrar as raizes de $x^2 - x$ e analisar o sinal da função, pois iremos integrar $\int_0^2 |x^2 - x|dx$.

11.7. Mudança de Variável na integral.

Um fato importante é que toda função contínua num intervalo fechado e limitado $[a, b]$ possui primitiva. Esse resultado fala sobre a existência, mas não diz como encontrar a primitiva.

No quadro da página 317, podemos ver sobre como calcular uma integral mudando a variável. Quando pensamos em termos de aproximações, o que estamos fazendo é mudar a base dos retângulos, então $g'(u)$ aparece para compensar essa mudança. A melhor forma de entender isso é com exemplos, e eu postareis a resolução de alguns exercícios.

O Exemplo 1, o método que vimos por enquanto seria abrir o polinômio de grau 10. Ao invés disso, iremos mudar a variável para $u = x - 1$ para ficar uma conta fácil. Isso é facilitado pelo fato de $(x-1)' = 1$. O Exemplo 2 segue o mesmo raciocínio para fazer a mudança no primeiro caso. A segunda resolução mostra que deve se tomar cuidado quando não temos uma bijeção na mudança de variável. O exemplo 3, é parecida com as duas anteriores.

O exemplo 4 e 5 depende do fato de existir um x para usar, já que a mudança envolve $u = x^2 + 1$ e $(x^2+1)' = 2x$. Se não tivesse x fora, não daria para fazer a mudança de variáv el.

O exemplo 6 fala sobre a integral ser 0 toda vez que tomarmos a integral de uma função ímpar num intervalo simétrico. Basicamente nesse caso, o gráfico de f antes do 0 aparece refletido 'ao contrário' e por isso o a integral de uma é igual ao negativo da outra e a soma das duas dá 0. O exemplo 7 usa o fato que o intervalo é simétrico e verifica que a função é ímpar. Não dá para achar a primitiva da função, então só dá para resolver esse exercício num intervalo simétrico.

No exercício 8, a principal dificuldade é o $x + 1$ dentro da raíz, por isso, é feita a mudança de variável $u = x + 1$.

Iremos pular a secção sobre Trabalho. Lembrando que quando a força era constante, o trabalho era força x deslocamento. No caso aqui, a força muda com o ponto, assim, uma aproximação do trabalho se associa a uma soma de Riemann e o trabalho vai ser dado por uma integral.

12. Técnicas de Integração.

Primitivas imediatas.

Veja a página 336. Nela vemos as primitivas da tabela. Para o cálculo de outras funções, iremos usar a tabela e algumas técnicas de integração. Já vimos a mudança de variável e a outra é a integração por partes. Ambas tem casos especiais para resolver alguns tipos de integrais. Nesta disciplina, iremos ver alguns exemplos mais básicos e não todos os que estão no livro. Eu irei postar algumas resoluções para quem tiver interesse em ver alguns casos que não serão cobertos nesta disciplina.