Resolução Lista 5

Questão 1.

Vamos calcular a matriz dos cofatores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nós temos que a matriz dos cofatores de A, $\operatorname{cof}(A)$, é dada por

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}|A_{11}| & (-1)^{1+2}|A_{12}| & (-1)^{1+3}|A_{13}| \\ (-1)^{2+1}|A_{21}| & (-1)^{2+2}|A_{22}| & (-1)^{2+3}|A_{23}| \\ (-1)^{3+1}|A_{31}| & (-1)^{3+2}|A_{32}| & (-1)^{3+3}|A_{33}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{12}| & |A_{13}| \\ -|A_{21}| & |A_{22}| & -|A_{23}| \\ |A_{31}| & -|A_{32}| & |A_{33}| \end{bmatrix}$$

onde,

$$A_{11} = \det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad A_{12} = \det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad A_{13} = \det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad A_{22} = \det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad A_{23} = \det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{31} = \det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad A_{32} = \det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad A_{33} = \det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -(-6) & 6 \\ -(-6) & -3 & -(-6) \\ 6 & -(-6) & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\operatorname{cof}(A) = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 6 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix}}.$$

Questão 2. No Teorema abaixo, reuni as principais propriedades do determinante de uma matriz. Nesse exercício vamos usar algumas delas.

Teorema 1. *Seja A uma matriz $n \times n$ e $\det(A)$ o seu determinante. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *Se A tem uma linha (ou coluna) de zeros então $\det(A) = 0$;*
2. *Se duas linhas (ou colunas) distintas da matriz A são formadas pelos mesmos elementos então $\det(A) = 0$;*
3. *Se B é a matriz que resulta ao trocar duas linhas (ou duas colunas) da matriz A então $\det(B) = -\det(A)$;*
4. *Se B é a matriz que resulta ao multiplicar por uma constante $k \in \mathbb{R}$ uma linha (ou coluna) da matriz A então $\det(B) = k\det(A)$;*
5. *Se B é a matriz que resulta ao adcionar à uma linha o múltiplo de uma outra linha então $\det(B) = \det(A)$;*
6. *Se $B = kA$ então $\det(B) = \det(kA) = k^n \det(A)$;*
7. $\det(A^T) = \det(A)$, *onde A^T é a matriz transposta de A;*
8. *Se B é uma matriz $n \times n$ então $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;*
9. *Se A é invertível então $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.*

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 4u & 2p & -a \\ 4v & 2q & -b \\ 4w & 2r & -c \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2p & u-a & 3u \\ 2q & v-b & 3v \\ 2r & w-c & 3w \end{bmatrix}.$$

Se $\det(A) = 3$, vamos calcular $\det(2B^{-1})$ e $\det(2C^{-1})$.
Usando as propriedades (6.) e (9.) do Teorema acima, nós temos que

$$\det(2B^{-1}) = 2^3 \frac{1}{\det(B)} = \frac{8}{\det(B)} \tag{1}$$

Agora vamos calcular $\det(B)$,

$$\det(B) = \det \begin{bmatrix} 4u & 2p & -a \\ 4v & 2q & -b \\ 4w & 2r & -c \end{bmatrix} \qquad \text{aplicando o item (4) do Teorema}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4 \cdot 2 \cdot (-1) \det \begin{bmatrix} u & p & a \\ v & q & b \\ w & r & c \end{bmatrix} \\
&= -8 \det \begin{bmatrix} u & p & a \\ v & q & b \\ w & r & c \end{bmatrix} && \begin{array}{c} C_1 \leftrightarrow C_3 \\ \text{aplicando o item (3) do Teorema} \end{array} \\
&= -8 \left(-\det \begin{bmatrix} a & p & u \\ b & q & v \\ c & r & w \end{bmatrix} \right) \\
&= 8 \det \begin{bmatrix} a & p & u \\ b & q & v \\ c & r & w \end{bmatrix} && \text{aplicando o item (7) do Teorema} \\
&= 8 \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix} \\
&= 8 \det(A) \quad (*)
\end{aligned}
$$

(onde C_j representa a j-ésima coluna da matriz)

substituindo $(*)$ em (1), obtemos que $\det(2B^{-1}) = \dfrac{8}{8\det(A)} = \dfrac{1}{\det(A)}$, como $\det(A) = 3$, nós temos que

$$\boxed{\det(2B^{-1}) = \frac{1}{3}}.$$

Analogamente, nós temos que

$$\det(2C^{-1}) = 2^3 \frac{1}{\det(B)} = \frac{8}{\det(B)} \tag{2}$$

Agora vamos calcular $\det(C)$,

$$
\begin{aligned}
\det(C) &= \det \begin{bmatrix} 2p & u-a & 3u \\ 2q & v-b & 3v \\ 2r & w-c & 3w \end{bmatrix} && \text{aplicando o item (4) do Teorema} \\
&= 2 \cdot 3 \det \begin{bmatrix} p & u-a & u \\ q & v-b & v \\ r & w-c & w \end{bmatrix} \\
&= 6 \det \begin{bmatrix} p & u-a & u \\ q & v-b & v \\ r & w-c & w \end{bmatrix} && \begin{array}{c} C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ \text{aplicando o item (5) do Teorema} \end{array}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 6\det\begin{bmatrix} p & -a & u \\ q & -b & v \\ r & -c & w \end{bmatrix} && \text{aplicando o item (4) do Teorema} \\
&= 6\left(-\det\begin{bmatrix} p & a & u \\ q & b & v \\ r & c & w \end{bmatrix}\right) \\
&= -6\det\begin{bmatrix} p & a & u \\ q & b & v \\ r & c & w \end{bmatrix} && \begin{array}{c} C_1 \leftrightarrow C_2 \\ \text{aplicando o item (3) do Teorema} \end{array} \\
&= -6\left(-\det\begin{bmatrix} a & p & u \\ b & q & v \\ c & r & w \end{bmatrix}\right) \\
&= 6\det\begin{bmatrix} a & p & u \\ b & q & v \\ c & r & w \end{bmatrix} && \text{aplicando o item (7) do Teorema} \\
&= 6\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix} \\
&= 6\det(A) \quad (**)
\end{aligned}
$$

(onde C_j representa a j-ésima coluna da matriz)

substituindo $(**)$ em (2), obtemos que $\det(2C^{-1}) = \dfrac{8}{6\det(A)} = \dfrac{4}{3\det(A)}$, como $\det(A) = 3$, nós temos que

$$\boxed{\det(2C^{-1}) = \frac{4}{3\cdot 3} = \frac{4}{9}}\,.$$

Questão 3. Vamos calcular $\det(xI - C)$ onde I é a matriz identidade 4×4 e C é dada por

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c & -d \end{bmatrix}.$$

Primeiro vamos obter a matriz $xI - C$:

$$\begin{aligned} xI - C = \quad & x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c & -d \end{bmatrix} \\ = \quad & \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c & -d \end{bmatrix} \\ = \quad & \begin{bmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & x+d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Agora vamos calulcar o $\det(xI - C)$:

$$\begin{aligned} \det(xI - C) = \quad & \det \begin{bmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & x+d \end{bmatrix} \\ = \quad & x \cdot (-1)^{1+1} |A_{11}| + \underbrace{0 \cdot (-1)^{2+1} |A_{21}|}_{=0} + \underbrace{0 \cdot (-1)^{3+1} |A_{31}|}_{=0} + a \cdot (-1)^{4+1} |A_{41}| \\ = \quad & x |A_{11}| - a |A_{41}| \qquad (!) \end{aligned}$$

onde,

$$|A_{11}| = \det \begin{bmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ b & c & x+d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad |A_{41}| = \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{bmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
|A_{11}| = & \det \begin{bmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ b & c & x+d \end{bmatrix} \\
= & \; x \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x & -1 \\ c & x+d \end{vmatrix} + \underbrace{0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} x & -1 \\ c & x+d \end{vmatrix}}_{=0} + b \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} x & -1 \\ c & x+d \end{vmatrix} \\
= & \; x \begin{vmatrix} x & -1 \\ c & x+d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix} \\
= & \; x\left(x\left(x+d\right)+c\right)+b \cdot 1 \\
= & \; x\left(x^2+dx+c\right)+b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|A_{41}| = & \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{bmatrix} \\
= & \; -1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix} + \underbrace{x \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix}}_{=0,\text{ pelo item (1) do Teorema 1}} + \underbrace{0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} \\
= & \; -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix} = -1
\end{aligned}
$$

Para concluir, nós temos em (!) que $\det(xI - C) = x\,|A_{11}| - a\,|A_{41}|$ então substituindo, obtemos finalmente que

$$
\begin{aligned}
\det(xI - C) = & \; x\left(x\left(x^2+dx+c\right)+b\right) - a\,(-1) \\
= & \; x\left(x^3+dx^2+cx+b\right)+a
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\det(xI - C) = x^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a}\,.
$$

QUESTÃO 4. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Vamos determinar o polinômio característico, os auto-valores e auto-vetores de A e uma matriz P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

1°) Determinamos a matriz $\lambda I - A$:

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ 1 & \lambda + 1 \end{bmatrix}.$$

2°) Vamos calcular $\det(\lambda I - A)$:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ 1 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

Portanto, o polinômio característico da matriz A é: $\boxed{c_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6}$.

3°) Vamos calcular as raízes de $c_A(\lambda)$, isto é, vamos calcular para quais valores de λ, $c_A(\lambda) = 0$.

$$c_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 3 \;\; \lambda_2 = -2.$$

Portanto os auto-valores de A são

$$\boxed{\lambda_1 = 3 \;\; \lambda_2 = -2}.$$

4°) Agora vamos calcular os auto-vetores de A associados aos auto-valores λ_1 e λ_2. Para tanto, vamos estudar as soluções dos sistemas

$$(\lambda_1 I - A)x_1 = 0 \;\text{ e }\; (\lambda_2 I - A)x_2 = 0$$

a) $(\lambda_1 I - A)x_1 = 0$:

$$(\lambda_1 I - A)x_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 - 2 & 4 \\ 1 & \lambda_1 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 - 2 & 4 \\ 1 & 3 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ x_{11} + 4x_{21} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = -4x_{21} \\ x_{11} = -4x_{21} \end{cases} \Leftrightarrow \text{se } \ x_{21} = t \text{ então } \ x_{11} = -4t.$$

Assim, $x_1 = \begin{bmatrix} -4t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$, para todo $t \neq 0$. E, portanto, podemos tomar $x_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ como sendo o auto-vetor básico de A associado à λ_1.

b) $(\lambda_2 I - A)x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} (\lambda_2 I - A)x_2 = 0 \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} \lambda_2 - 2 & 4 \\ 1 & \lambda_2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} -2 - 2 & 4 \\ 1 & -2 + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} -4x_{12} + 4x_{22} = 0 \\ x_{12} - x_{22} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{12} = x_{22} \\ x_{12} = x_{22} \end{cases} \Leftrightarrow \text{se } \ x_{12} = t \text{ então } \ x_{22} = t.$$

Assim, $x_2 = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, para todo $t \neq 0$. E, portanto, podemos tomar $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ como sendo o auto-vetor básico de A associado à λ_2.

Portanto, $\boxed{x_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } x_2 = \begin{bmatrix} 21 \\ 1 \end{bmatrix}}$, são os auto-vetores (básicos) de A associados aos auto-valores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$, respectivamente.

5°) Seja $P = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, a matriz formada pelos auto-vetores x_1 e x_2, nessa ordem. Vamos mostrar que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

Primeiro note que $\det(P) = \det \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -5 \neq 0$, portanto P é invertível e, como P^{-1} é fácilmente calculada pela fórmula $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)} \operatorname{adj}(P)$, obtemos que

$$P^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos ao produto:

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP = & -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \\
= & -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -12 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \\
= & -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \text{ que é uma matriz diagonal, como queríamos.} \quad \square
\end{aligned}
$$

(Obs.: Note que a diagonal principal da matriz diagonal $D = P^{-1}AP$ é formada pelos auto-valores λ_1 e λ_2, nessa ordem.)

QUESTÃO 5. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ e $v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Supondo que

$$v_{k+1} = Av_k, \tag{3}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, vamos escrever os vetores v_k como combinação dos auto-vetores de A.

Afirmação 1. *Se $v_{k+1} = Av_k$ então $v_k = A^k v_0$.*

Demonstração 1. De fato,

- Se $k = 1$ então por (3) nós temos que $v_1 = Av_0 = A^1 v_0$;
- Suponha, por indução, que a afirmação é válida para k, isto é $v_k = A^k v_0$, vamos mostrar que vale para $k+1$. Pela equação (3) segue que

$$v_{k+1} = Av_k \underbrace{=}_{\substack{\text{por hipótese de} \\ \text{indução}}} A(A^k v_0) = (AA^k)v_0 = A^{k+1}v_0,$$

como queríamos. □

Assim da equação (3) nós temos que

$$\boxed{v_k = A^k v_0} \tag{4}$$

Nós vimos no exercício anterior que se P é uma matriz formada pelos auto-vetores da matriz A e inversível, então $P^{-1}AP = D$ é uma matriz diagonal cuja a diagonal principal é formada pelos auto-valores de A. De fato, isso é um Teorema (ver p.157 do Livro do Nicholson):

Teorema 2. *Se A é uma matriz $n \times n$ então:*

1. *A é diagonalizável se, e somente se, possuir auto-vetores $x_1, x_2 \cdots, x_n$ tal que a matriz $P = [x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n]$;*
2. *Quando esse é o caso, $P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, onde λ_i é o auto-valor de A associado ao auto-vetor x_i.*

Agora, a estratégia vai ser escrever a matriz A em função da matriz D. O que não é muito difícil, pois como nós temos que $P^{-1}AP = D$ segue que $A = PDP^{-1}$. De fato,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = D &\Leftrightarrow \; P(P^{-1}AP) = PD \\ &\Leftrightarrow \; (P^{-1}P)AP = PD \\ &\Leftrightarrow \; AP = PD \\ &\Leftrightarrow \; (AP)P^{-1} = (PD)P^{-1} \\ &\Leftrightarrow \; A(PP^{-1}) = PDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow \; \boxed{A = PDP^{-1}} \end{aligned}$$

Afirmação 2. *Se* $A = PDP^{-1}$ *então* $A^k = PD^kP^{-1}$.

Demonstração 2. De fato,

- quando $k = 1$ nós temos que $A^1 = A = PDP^{-1} = PD^1P_{-1}$ e,
- supondo, por indução, que vale para k, isto é $A^k = PD^kP^{-1}$, vamos mostrar que vale para $k+1$:

$$\begin{aligned} A^{k+1} = A^kA \underbrace{=}_{\substack{\text{por hipótese de}\\ \text{indução}}} (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) &= PD^k(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= P(D^kD)P^{-1} \\ &= PD^{k+1}P^{-1}, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Assim, pela Afirmação 1 e Afirmação 2 nós temos que

$$\boxed{v_k = PD^kP^{-1}v_0}\,.$$

1° Vamos calcular os auto-valores e auto-vetores da matriz A.

$$\begin{aligned} c_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) &= \det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -4 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 1) - 4 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 6. \end{aligned}$$

Vamos achar as raízes do polinômio característico $c_A(\lambda)$:

$$\begin{aligned} c_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \quad \lambda &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} \\ \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 3 \;\; \lambda_2 &= -2. \end{aligned}$$

Portanto os auto-valores de A são

$$\boxed{\lambda_1 = 3 \;\; \lambda_2 = -2}\,.$$

Para determinarmos os auto-vetores, vamos estudar os sistemas homogênios:

$$(\lambda_1 I - A)x_1 = 0 \;\text{ e }\; (\lambda_2 I - A)x_2 = 0.$$

$$(\lambda_1 I - A)x_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-2 & -1 \\ -4 & 3+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x_{11} - x_{21} = 0 \\ -4x_{11} + 4x_{21} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = x_{21} \\ x_{11} = x_{21} \end{cases} \Leftrightarrow \text{se } \ x_{11} = t \text{ então } \ x_{21} = t.$$

Assim, $x_1 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, para todo $t \neq 0$. E, portanto, podemos tomar $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ como sendo o auto-vetor básico de A associado à $\lambda_1 = 3$.

Analogamente,

$$(\lambda_2 I - A)x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2-2 & -1 \\ -4 & -2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} -4x_{12} - x_{22} = 0 \\ -4x_{12} - x_{22} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{22} = -4x_{12} \\ x_{22} = -4x_{12} \end{cases} \Leftrightarrow \text{se } \ x_{12} = t \text{ então } \ x_{22} = -4t.$$

Assim, $x_2 = t \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$, para todo $t \neq 0$. E, portanto, podemos tomar $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ como sendo o auto-vetor básico de A associado à $\lambda_2 = -2$.

Portanto,

$$\boxed{x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}}$$

são os auto-vetores (básicos) de A associados aos auto-valores $\boxed{\lambda_1 = 3 \text{ e } \lambda_2 = -2}$, respectivamente.

2° Seja $P = [x_1 \ \ x_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ a matriz formada pelos auto-vetores de A. Temos que $\det(P) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = -5 \neq 0$, logo P é invertível e $P^{-1} = -\dfrac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Assim, pelo Teorema 2 nós temos que

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{bmatrix}.$$

Para concluirmos o exercício, basta calcularmos $v_k = PDkP^{-1}v_0$:

$$\begin{aligned}
v_k = PDkP^{-1}v_0 = & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
= & -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \\
= & -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}} \\
= & -\frac{1}{5} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \cdot 3^k \\ 1 \cdot (-2)^k \end{bmatrix}} \\
= & -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \cdot (-6 \cdot 3^k) + 1 \cdot (-2)^k \\ 1 \cdot (-6 \cdot 3^k) - 4 \cdot (-2^k) \end{bmatrix} \\
= & -\frac{1}{5} \left(-6 \cdot 3^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \right) \\
= & \frac{6 \cdot 3^k}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{(-2)^k}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \\
= & \frac{6 \cdot 3^k}{5} x_1 - \frac{(-2)^k}{5} x_2
\end{aligned}$$

$\square$