



# MAT0105 – Geometria Analítica

## Vetores: LI/LD e Bases

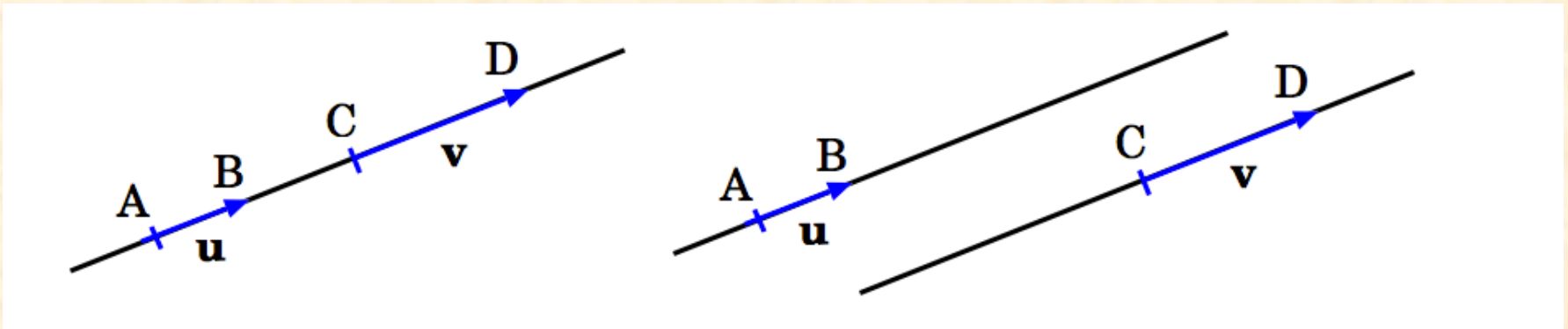
*Profa. Ana Paula Jahn*

[anajahn@ime.usp.br](mailto:anajahn@ime.usp.br)

# Vetores Paralelos (ou colineares)

Relembrando:

- Dizemos que **dois vetores são paralelos** (ou colineares) quando seus representantes tiverem a **mesma direção**, ou seja, se tiverem representantes sobre **uma mesma reta** ou sobre **retas paralelas**.
- O vetor nulo  $\vec{0}$  é paralelo a todo vetor e também todo vetor é paralelo a si mesmo.



# Condição de Paralelismo

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \ (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{u} = k\vec{v}$$

( $\Rightarrow$ ) Se  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ , vamos considerar 2 casos:

i)  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  têm mesmo sentido

Neste caso,  $\|\vec{v}\| \neq 0$ . Seja:  $k = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$ . Provemos que  $\vec{u} = k\vec{v}$ .

Como por hipótese  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ ,  $\vec{u}$  e  $k\vec{v}$  possuem a mesma direção e como  $k > 0$ , pela def. de multiplicação por escalar,  $\vec{u}$  e  $k\vec{v}$  têm o mesmo sentido. Finalmente,

$\|k\vec{v}\| = |k| \|\vec{v}\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|} \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|$ , o que prova que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm o mesmo comprimento.

Logo, como os vetores  $\vec{u}$  e  $k\vec{v}$  possuem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento, eles são iguais.

# Condição de Paralelismo

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \ (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{u} = k\vec{v}$$

( $\Rightarrow$ ) Se  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ , vamos considerar 2 casos:

ii)  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  têm sentidos contrários

Neste caso, escolhemos  $k = -\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$ .

E a prova se faz de maneira análoga.

Os vetores  $\vec{u}$  e  $k\vec{v}$  possuem mesma direção, mesmo sentido e comprimento, logo são iguais.

( $\Leftarrow$ ) A recíproca segue diretamente da definição de multiplicação de vetor por escalar: se  $\vec{u} = k\vec{v}$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  têm mesma direção e, portanto, são paralelos.

# Condição de Paralelismo

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{u} = k\vec{v}$$

*Em coordenadas :*

$$\vec{u} = (x_1, y_1) \text{ e } \vec{v} = (x_2, y_2)$$

$$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow (x_1, y_1) = k(x_2, y_2)$$

$$(x_1, y_1) = (kx_2, ky_2) \Leftrightarrow x_1 = kx_2 \text{ e } y_1 = ky_2$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k$$

**Suas componentes  
são proporcionais.**

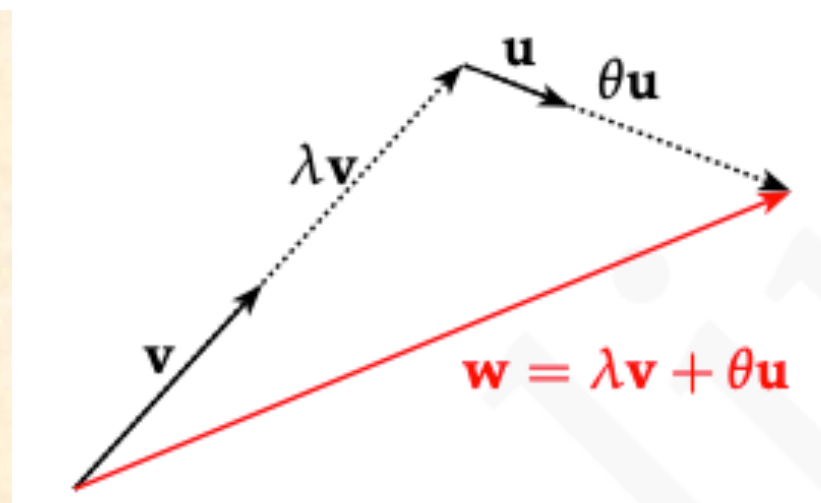
O mesmo vale para vetores do espaço ( $V^3$ ).

# Combinação Linear (c.l.)

Relembrando:

(a) Dizemos que um vetor  $\vec{v}$  é **múltiplo** do vetor  $\vec{u}$  se existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ .

(b) Dizemos que um vetor  $\vec{v}$  é **combinação linear** dos vetores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  quando existem números reais  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  tais que  $\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \dots + \lambda_n\vec{v}_n$ .



# Combinação Linear (c.l.)

Algumas observações:

- O vetor nulo,  $\vec{0}$ , é múltiplo de qualquer vetor  $\vec{u}$ .

De fato,  $\vec{0} = 0\vec{u}$ .

- Nenhum vetor não-nulo pode ser múltiplo do vetor nulo.

De fato, se  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , não existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda\vec{0} = \vec{u}$ , pois  $\lambda\vec{0} = \vec{0}$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- Se  $\vec{v} \neq \vec{0}$  é múltiplo de  $\vec{u}$ , então  $\vec{u}$  é também múltiplo de  $\vec{v}$ .

Com efeito. seja  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ . Como  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , temos  $\lambda \neq 0$  e  $\vec{u} \neq \vec{0}$ . Logo  $\vec{u} = \frac{1}{\lambda}\vec{v}$ .

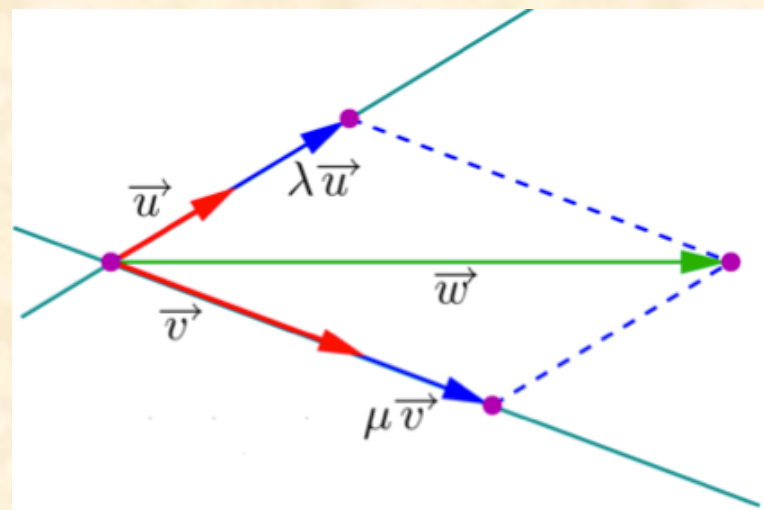


## No plano ( $V^2$ )

Se nenhum dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é múltiplo um do outro, então qualquer outro vetor  $\vec{w}$  do plano se escreve de modo único como combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Isto é, existem  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , determinados de forma única por  $\vec{w}$ , tais que  $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ .

Podemos justificar essa propriedade:

**Geometricamente** – considerando a construção do paralelogramo de lados  $\lambda\vec{u}$  e  $\mu\vec{v}$  (múltiplos de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ) e diagonal  $\vec{w}$  (vetor soma).





## No plano ( $V^2$ )

*Se nenhum dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é múltiplo um do outro, então qualquer outro vetor  $\vec{w}$  do plano se escreve de modo único como combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Isto é, existem  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , determinados de forma única por  $\vec{w}$ , tais que  $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ .*

Podemos justificar essa propriedade:

**Algebricamente** – usando coordenadas, analisar o sistema obtido a partir da combinação linear  $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$  (verificar que se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são paralelos, o **sistema é possível e determinado**) .

## No plano $E^2$

*O plano é bidimensional (de dimensão 2).*

*Isso significa que basta conhecer **dois** vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , que não sejam múltiplo um do outro, para conhecer todos os outros vetores do plano. De fato, pela proposição anterior, qualquer outro vetor se expressa de forma única como combinação linear desses dois vetores.*

No plano: 2 vetores não paralelos = LI (“não repete direção”)

Em  $V^2$ , quaisquer dois vetores não paralelos constituem uma **base** do plano.

E com eles, podemos definir um sistema de coordenadas.

## No espaço ( $V^3$ )

- Vetor paralelo a um plano: dado um plano  $\pi$  e um vetor  $\vec{u}$   
 $\vec{u} // \pi$  quando tomado um representante, sua reta suporte é paralela ao plano
- Vetores coplanares: 3 vetores paralelos a um mesmo plano
  - 3 vetores não coplanares = LI

Em  $V^3$ , quaisquer três vetores não coplanares constituem uma **base** do espaço. E com eles, podemos definir um sistema de coordenadas.

# Resolução de Sistemas

- Algebricamente, C.L. - recai em **resolução de sistemas lineares**
- C.L. do **vetor nulo** – recai em sistemas lineares homogêneos (pelo menos uma solução)

Diferentes métodos de resolução de sistemas:

- Substituição
- Regra de Cramer
- Escalonamento

# Regra de Cramer

Dado um sistema linear de  $n$  equações e  $n$  incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} = k_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn} = k_n \end{cases}$$

podemos escrever esse sistema como  $AX = k$  onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

A matriz  $A$  é denominada matriz de coeficientes e  $k$  a matriz de constantes.

Seja  $D$  o determinante da matriz  $A$ .

*Se  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  for um sistema de  $n$  equações lineares em  $n$  incógnitas tal que  $\det(A) \neq 0$ , então o sistema tem uma única solução. Essa solução é*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

*em que  $A_j$  é a matriz obtida substituindo as entradas da  $j$ -ésima coluna de  $A$  pelas entradas da matriz*

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Importância: conhecer propriedades das soluções, sem precisar resolvê-lo.



**Gabriel Cramer**  
(1704–1752)

**Nota histórica** Variações da Regra de Cramer eram razoavelmente conhecidas antes do matemático suíço Gabriel Cramer discuti-la num trabalho publicado em 1750. Foi a notação superior de Cramer que popularizou o método e levou os matemáticos a associar seu nome à regra.

[Imagem: Granger Collection]



# Exercício

Considere os seguintes vetores dados em termos de suas coordenadas na base canônica de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{u}_1 = (0, 0, 0), \quad \vec{u}_2 = (-1, 0, 2), \quad \vec{u}_3 = (-1, 1, 2), \quad \vec{u}_4 = (0, 1, 0), \quad \vec{u}_5 = (1, 1, 1).$$

Determine se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta com uma demonstração ou um contra-exemplo:

- (a)  $\vec{u}_1$  pode ser escrito de infinitas formas diferentes como combinação linear de  $\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ .
- (b) O conjunto  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  é linearmente independente.
- (c) O conjunto  $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$  é linearmente independente.
- (d) O conjunto  $\{\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_5\}$  é linearmente independente.
- (e) O conjunto  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  é linearmente independente.
- (f)  $B = (\vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$  é uma base de  $V^3$ .



## Exercício

Dados os vetores  $\vec{a} = (5, -1, 0)$ ,  $\vec{b} = (2, 0, 1)$  e  $\vec{c} = (0, 1, 3)$ , escreva o vetor  $\vec{x} = (2, -1, -1)$  como combinação linear de  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ .

# Combinação Linear

De modo geral, se diz que  $\vec{v}$  é **combinação linear** dos vetores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  se existem escalares  $a_1, a_2 \dots a_n$  tais que:  $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$