# Desenvolvimento do Campo de Radiação em Multipolos

[J. Frenkel; Princípios da Electrodinâmica Clássica. Cap. 5]

[J.D. Jackson; Classical Electrodynamics, Chap.9]

## Fontes Monocromáticas Fixas

$$\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})e^{-i\omega t}; \quad \vec{j}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

## Potencial Vetor (Aula 25 MAI 2020)

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[\vec{j}(\vec{r}\,',t')]_{ret}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'; \quad t'_{ret} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$$

$$[\vec{j}(\vec{r}\,',t')]_{ret} = \vec{j}(\vec{r}\,')e^{-i\omega t}e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}; \quad k = \frac{\omega}{c}$$

$$\therefore \boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r})e^{-i\omega t}; \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}\,')\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'}$$

Para fontes monocromáticas, a definição de regiões próxima e distante fica mais específica

Grandezas características

$d$: dimensão característica (máxima) da fonte; $\lambda = 2\pi/k$

Zona próxima (estática): $d \ll r \ll \lambda$; Zona intermediária (indução): $d \ll r \sim \lambda$

Zona distante (radiação): $d \ll \lambda \ll r$

---

Exercício:

Fazendo as aproximações apropriadas, mostre que, na zona próxima, o potencial vetor é dado por

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}{r^{\ell+1}} \int \vec{J}(\vec{r}') r'^{\ell} Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi') dV'$$

Esse resultado mostra que, na região próxima, o campo electromagnético tem a mesma configuração dos campos elétrico e magnético estáticos, mas oscilando com a frequência $\omega$.

## Zona Distante

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = (\vec{r}-\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}') = r^2\left(1-2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}+\frac{r'^2}{r^2}\right)$$

$$\therefore |\vec{r}-\vec{r}'| \cong r\left(1-2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right)^{1/2} = r-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r} \Rightarrow e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|} = e^{ikr}e^{-ik\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}}$$

Portanto, a expressão para o potencial fica

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{r}')e^{-ik\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}}dV'\right]\frac{e^{-i(\omega t-kr)}}{r}$$

Portanto, o potencial vetor tem a forma de uma onda esférica, caracterizada pelo fator $e^{-i(\omega t-kr)}/r$, e uma dependência angular dada pelo produto escalar $\vec{r}\cdot\vec{r}'$ no expoente dentro da integral. A ordem de grandeza desse expoente é

$$\left|k\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}\right| \leq 2\pi\left|\frac{r'}{\lambda}\right| \leq 2\pi\frac{d}{\lambda} \ll 1$$

Portanto, podemos desenvolver a exponencial no integrando em série de Taylor

$$e^{-ik\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}} = \sum_n \frac{1}{n!}\left(-ik\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}\right)^n$$

Assim, a amplitude do potencial vetor fica

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_n \frac{(-ik)^n}{n!}\int \vec{J}(\vec{r}')\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}\right)^n dV'}$$

---

<u>Exercício</u>: mostre que a divergência da díada $\vec{A}\vec{r}$ é dada por

$$\nabla\cdot\left(\vec{A}\vec{r}\right) = \vec{A} + \vec{r}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)$$

e que, integrando essa expressão em todo o espaço e aplicando o teorema de Gauss, tem-se

$$\int \hat{n}\cdot\left(\vec{A}\vec{r}\right)dS = \int \vec{A}dV + \int \vec{r}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)dV$$

## Campo de Dipolo Elétrico

Na expressão para o potencial vetor, tomemos o termo de mais baixa ordem, $n = 0$;

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{j}(\vec{r}')dV'$$

Na relação vetorial demonstrada no exercício, vamos tomar $\vec{A} = \vec{j}$; então

$$\int \hat{n} \cdot (\vec{j}\vec{r})dS = \int \vec{j}dV + \int \vec{r}(\nabla \cdot \vec{j})dV$$

Fazendo a integral do lado esquerdo sobre uma superfície que engloba toda a fonte, mas esteja fora dela, de forma que $\vec{j} = 0$ na superfície, e considerando a equação da continuidade,

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Longrightarrow \int \vec{j}dV = \int \vec{r} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Esse resultado é válido qualquer que seja a densidade de corrente; em particular, no caso de fontes monocromáticas, resulta

$$\int \vec{j}(\vec{r}')dV' = -i\omega\vec{p};\ \vec{p} = \int \vec{r}'\rho(\vec{r}')dV'$$

que é o momento de dipolo definido no desenvolvimento do potencial eletrostático em multipolos. Assim, a expressão para o potencial vetor de um dipolo oscilante fica

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\vec{p}\,\frac{e^{-i(\omega t-kr)}}{r}}$$

<u>Campo magnético</u>:

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi}e^{-i\omega t}\left[\vec{p}\times\nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right] = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi}e^{-i(\omega t-kr)}\vec{p}\times\left[\left(\frac{ik}{r}-\frac{1}{r^2}\right)\hat{e}_r\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{ck^2\mu_0}{4\pi}(\hat{n}\times\vec{p})\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\frac{e^{-i(\omega t-kr)}}{r};\ \ \hat{n} = \hat{e}_r$$

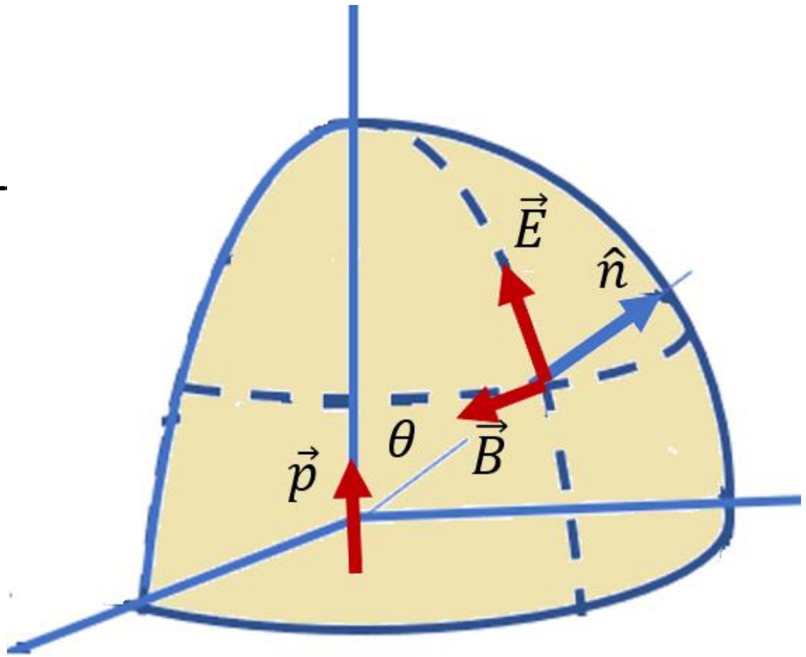
Exercício:

Fazer os cálculos para obter a expressão para o campo elétrico (Jackson; eq. 9.18):

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2(\hat{n}\times\vec{p})\times\hat{n}\,\frac{e^{-i(\omega t-kr)}}{r}$$

para a componente de radiação.

---




Vemos, portanto, que os vetores $\vec{E}, \vec{B}, \hat{n}$ formam um triedro reto, de forma que o campo electromagnético corresponde a uma onda esférica propagando-se radialmente. O campo elétrico pode ainda ser escrito como

$$\vec{E} = c\vec{B}\times\hat{n} = Z_0\vec{H}\times\hat{n}$$

sendo $Z_0$ a impedância intrínseca do vácuo.

O vetor de Poynting médio e a potência total radiada podem ser calculados imediatamente

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}Re\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right] = Z_0\frac{c^2k^4}{32\pi^2}\frac{p^2}{r^2}(\sin\theta)^2\hat{n}; \quad P = \int\langle\vec{S}\rangle\cdot d\vec{a} = \frac{c^2k^4}{12\pi}p^2$$

## Dipolo magnético

O próximo termo no desenvolvimento para o potencial vetor é

$$\vec{A}(\vec{r})\Big|_{n=1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}(-ik)\int \vec{j}(\vec{r}\,')\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r}\,dV'$$

Para colocar o integrando em uma forma mais conveniente, vamos utilizar uma relação vetorial simples

$$(\vec{r}\,'\times\vec{j})\times\frac{\vec{r}}{r} = -\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{j}\right)\vec{r}\,' + \left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}\,'\right)\vec{j} \rightarrow \left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}\,'\right)\vec{j} = \left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{j}\right)\vec{r}\,' + (\vec{r}\,'\times\vec{j})\times\frac{\vec{r}}{r}$$

$$2\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}\,'\right)\vec{j} = \left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{j}\right)\vec{r}\,' + \left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}\,'\right)\vec{j} + (\vec{r}\,'\times\vec{j})\times\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\therefore \left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}\,'\right)\vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{r}\,'\times\vec{j})\times\frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{j}\right)\vec{r}\,' + \left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}\,'\right)\vec{j}\right]$$

Esse resultado transformou o integrando em uma parcela antissimétrica ao intercâmbio $\vec{r}\,' \leftrightarrow \vec{j}(\vec{r}\,')$ e outra simétrica. A primeira dá a contribuição de radiação de dipolo magnético, que veremos nesta aula, e a simétrica dá a radiação de quadrupolo elétrico, que veremos na próxima aula.  Considerando somente a contribuição antissimétrica, temos

$$\vec{A}(\vec{r})\Big|_{mag} = -ik\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\left[\frac{1}{2}\int \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')dV'\right] \times \frac{\vec{r}}{r}$$

Mas o termo entre colchetes é exatamente a definição de momento de dipolo magnético (Aula 18 MAI 2020).

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')\,dV'$$

Portanto, obtemos

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t)\Big|_{mag} = \frac{ik\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}\left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{m}\right)}$$

Exercício

Fazendo o cálculo direto, e não analogias como sugere o Jackson, obtenha as expressões para os campos na zona de radiação

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{Z_0}{4\pi}k^2\frac{e^{-i(\omega t-kr)}}{r}(\hat{n}\times\vec{m});\ \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}k^2\frac{e^{-i(\omega t-kr)}}{r}(\hat{n}\times\vec{m})\times\hat{n}$$

(No cálculo, lembre-se que $\vec{m}$ é um vetor constante)

---

É interessante notar que a radiação de dipolo magnético pode ser convertida em radiação de dipolo magnético com as substituições $\vec{m}\to\vec{p}$; $\vec{B}\to\vec{E}$; $\vec{E}\to-\vec{B}$.