# Campo Electromagnético Produzido por Cargas em Movimento - IV

→[B. Thidé; Electromagnetic Field Theory; Sec. Edition; Section 6.5.4]

[W. Panofsky and M. Phillips; Classical Electricity and Magnetism; Section. 20.4]

## Campos de radiação

Vamos retornar às expressões gerais para os campos de radiação

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\frac{1}{s^3}\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-R\vec{\beta}\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right]_{ret};\ \vec{B}_{rad}\,(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\left[\frac{\vec{R}}{R}\right]_{ret}\times\vec{E}_{rad}(\vec{r},t)$$

$$s = R-\vec{R}\cdot\vec{\beta};\ \ \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'(t');\ \ t'_{ret} = t-\frac{R}{c} = t-\frac{1}{c}\left|\vec{r}-\vec{r}'(t'_{ret})\right|;\ \vec{\beta} = \frac{\vec{v}_q(t')}{c}$$

## Expressão geral para o vetor de Poynting

$$\vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}_{rad}\times\vec{B}_{rad} = \frac{1}{\mu_0 Rc}\left[\vec{E}_{rad}\times\left(\vec{R}\times\vec{E}_{rad}\right)\right]_{ret}$$

$$= \frac{1}{\mu_0 Rc}\left[E_{rad}^2\vec{R}-\left(\vec{E}_{rad}\cdot\vec{R}\right)\vec{E}_{rad}\right]_{ret}$$

Mas, da expressão para o campo elétrico, temos que $\vec{E}_{rad} \cdot \vec{R} = 0$; portanto

$$\vec{S}_{rad} = \epsilon_0 c \left[E_{rad}^2 \frac{\vec{R}}{R}\right]_{ret}$$

Este resultado mostra que o vetor de Poynting é sempre na direção do vetor $\vec{R}$. Usando este resultado na expressão que derivamos na aula passada para a potencia radiada pela carga na posição retardada,

$$\frac{dU}{dt'} d\Omega = \frac{s}{R} \frac{dU}{dt} d\Omega = \frac{s}{R} \hat{e}_R \cdot \vec{S}_{rad} R^2 d\Omega \rightarrow \frac{dU}{dt'} d\Omega = \epsilon_0 c \left[E_{rad}^2 s R\right]_{ret} d\Omega$$

---

<u>Exercício</u>: mostre que

$$\left\{\vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - R\vec{\beta}\right) \times \dot{\vec{v}}_q\right]\right\}_{ret}^2 = \left[-\left(\dot{\vec{v}}_q \cdot \vec{R}\right)^2 R^2 (1 - \beta^2) + \dot{\vec{v}}_q^2 R^4 \left(1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R}\right)^2\right]_{ret}$$

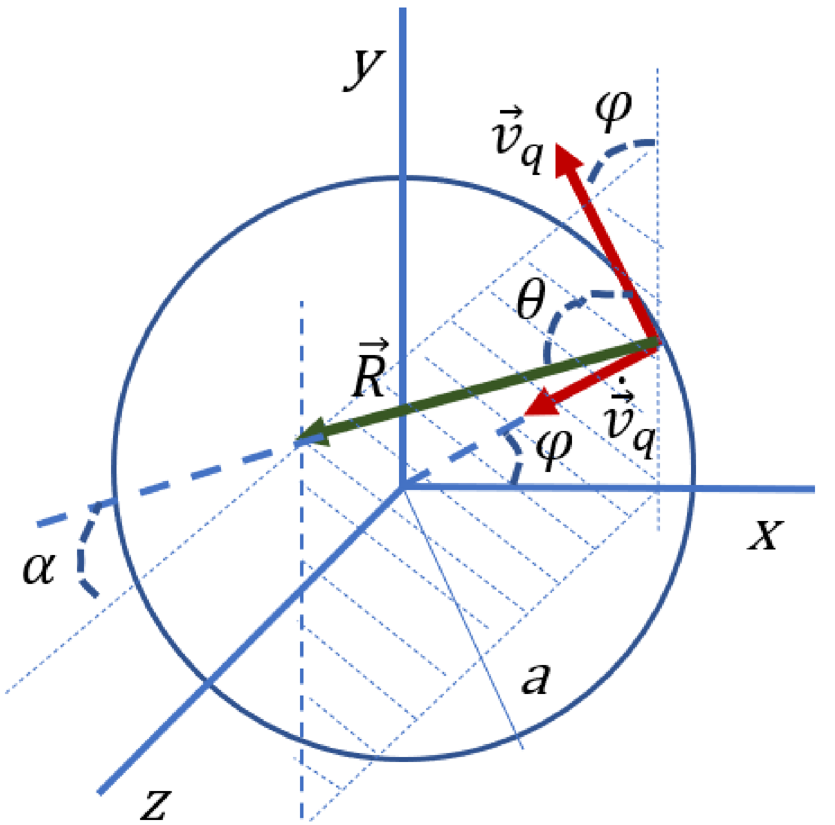
---

## Radiação de carga em movimento circular

Suponhamos a carga em movimento circular no plano $(x, y)$, tal que sua posição angular seja dada por $\varphi = \omega_0 t'$. A velocidade e aceleração da carga são, respectivamente,

$$\vec{v}_q(t') = a\omega_0 \hat{e}_\varphi; \quad \dot{\vec{v}}_q(t') = -a\omega_0^2 \hat{e}_r$$

(os versores $\hat{e}_r; \hat{e}_\varphi$ variam com $t'$).




Como o campo de radiação deve depender somente do ângulo entre a direção de observação e o eixo da órbita, escolhemos as posições dos eixos $(x, y)$ tal que o vetor $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'(t')$ fique em um plano paralelo ao plano $(y, z)$, formando um ângulo $\alpha$ com o eixo $z$.

Em coordenadas cartesianas, temos

$$\vec{v}_q = a\omega_0\left(-\sin\varphi\,\hat{e}_x + \cos\varphi\,\hat{e}_y\right); \dot{\vec{v}}_q = -a\omega_0^2\left(\cos\varphi\,\hat{e}_x + \sin\varphi\,\hat{e}_y\right);$$

$$\vec{R} = R\left(\sin\alpha\,\hat{e}_y + \cos\alpha\,\hat{e}_z\right) \therefore \vec{R}\cdot\vec{v}_q = a\omega_0 R\sin\alpha\cos\varphi\,; \ \vec{R}\cdot\dot{\vec{v}}_q = -a\omega_0^2 R\sin\alpha\sin\varphi;$$

Também podemos representar os resultados em termos do ângulo entre $\vec{R}$ e $\vec{v}_q$:

$$\vec{R} \cdot \vec{v}_q = a\omega_0 R \cos\theta = a\omega_0 R \sin\alpha \cos\varphi \rightarrow \cos\theta = \sin\alpha\cos\varphi$$

Usando o resultado derivado no exercício, temos

$$E_{rad}^2 = \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\right]^2 \left[\frac{1}{s^6}\left\{-\left(\dot{\vec{v}}_q \cdot \vec{R}\right)^2 R^2(1-\beta^2) + \dot{\vec{v}}_q^2 R^4 \left(1 - \frac{\vec{R}\cdot\vec{\beta}}{R}\right)^2\right\}\right]_{ret}$$

$$E_{rad}^2 = \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\right]^2 \left[\frac{R^4 \dot{v}_q^2}{s^6}\{(1-\beta\sin\alpha\cos\varphi)^2 - (1-\beta^2)(\sin\alpha\sin\varphi)^2\}\right]_{ret}$$

Tomando a expressão de $(dU/dt')d\Omega$ e usando $s = R - \vec{R}\cdot\vec{\beta} = R(1-\beta\sin\alpha\cos\varphi)$, temos

$$\left(\frac{dU}{dt'}\right)d\Omega = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\left[\dot{v}_q^2 \frac{(1-\beta\sin\alpha\cos\varphi)^2 - (1-\beta^2)(\sin\alpha\sin\varphi)^2}{(1-\beta\sin\alpha\cos\varphi)^5}\right]_{ret} d\Omega$$

$$\left(\frac{dU}{dt'}\right)d\Omega = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\left[\dot{v}_q^2 \frac{(1-\beta^2)(\cos\alpha)^2 + (\beta - \sin\alpha\cos\varphi)^2}{(1-\beta\sin\alpha\cos\varphi)^5}\right]_{ret} d\Omega$$

É importante notar que esta expressão é uma função complicada do tempo, já que

$$\varphi = \omega_0 t'$$

Diagrama de radiação

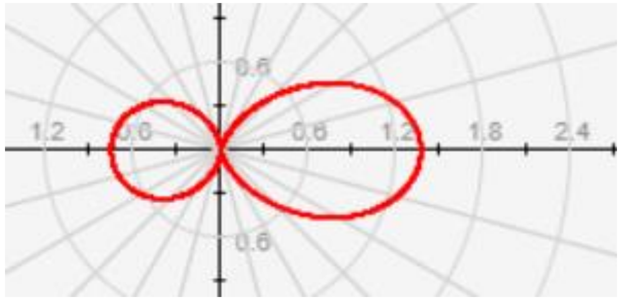
A potência radiada tende a se concentrar fortemente na direção da velocidade à medida que $\beta \to 1$. Para melhor visualizar o diagrama de radiação, consideremos o plano da órbita,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \to \cos\theta = \cos\varphi \Longrightarrow \frac{dU}{dt'} d\Omega = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left[ \frac{(\beta - \cos\theta)^2}{(1 - \beta\cos\theta)^5} \right]_{ret} d\Omega$$

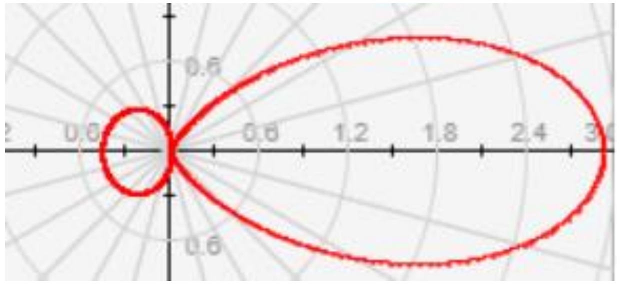
Os diagramas de radiação no plano da órbita são mostrado na próxima página, para diferentes valores de $\beta$.

Os lobos do diagrama de radiação (intensidade nula) naturalmente são dados pela condição $\theta = \cos^{-1}\beta$.

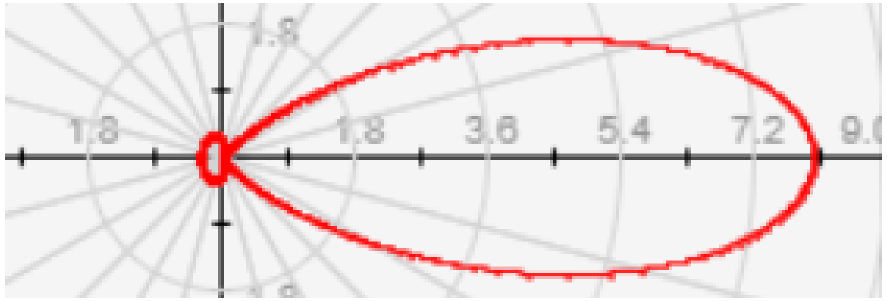
# Diagramas de radiação no plano da órbita



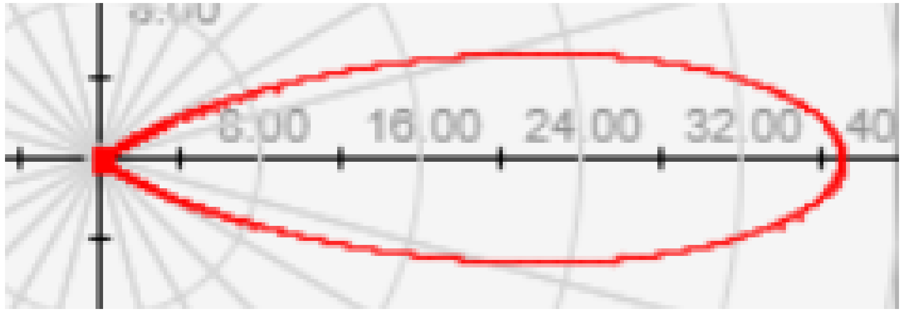

$\beta = 0{,}1$



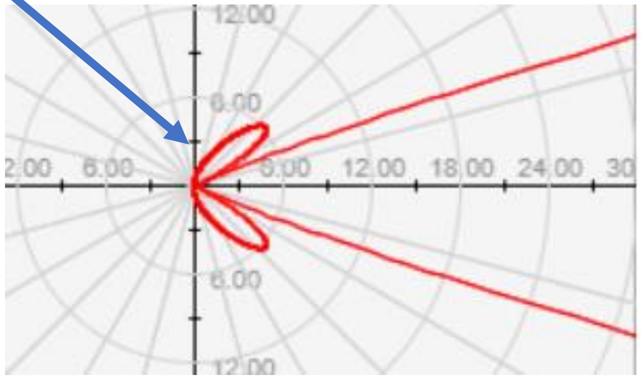

$\beta = 0{,}3$




$\beta = 0{,}5$




$\beta = 0{,}7$


$\beta = 0{,}9$

## Exercício

Obtenha a expressão total radiada pela carga. Para isso, faça a integral considerando o ângulo sólido referenciado à velocidade da carga. Portanto, o ângulo $\theta$ fica o ângulo polar. O eixo $z$ pode ser considerado como o eixo de referência para medir o ângulo azimutal. Portanto, o ângulo sólido fica $d\Omega = d\alpha \sin\theta \, d\theta$. O ângulo $\varphi$ pode ser referenciado aos outros dois ângulos, isto é, $\cos\varphi = \cos\theta / \sin\alpha$. Assim, o integrando será

$$\frac{(1-\beta\sin\alpha\cos\varphi)^2 - (1-\beta^2)(\sin\alpha\sin\varphi)^2}{(1-\beta\sin\alpha\cos\varphi)^5} d\Omega$$

$$= \frac{(1-\beta\cos\theta)^2 - (1-\beta^2)[(\sin\alpha)^2 - (\cos\theta)^2]}{(1-\beta\cos\theta)^5} \sin\theta \, d\alpha d\theta$$

Mostre que a potência total radiada é

$$P = \frac{dU}{dt'} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left[\frac{\dot{v}_q^2}{(1-\beta^2)^2}\right]_{ret} = \frac{2}{3}\left(\frac{\omega_0^2 r_0}{c}\right)\beta^2\gamma^4; \;\; r_0^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2},$$

onde $r_0$ é o “raio clássico” do elétron.

<u>Radiação Ciclotrônica</u>: $\beta \ll 1$

Tomando o limite $\beta \to 0$, a expressão para a potência radiada fica

$$\left(\frac{dU}{dt'}\right) d\Omega = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\left[\dot{v}_q^2\left(1-(\cos\theta)^2\right)\right]_{ret} d\Omega = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\left[\dot{v}_q^2(\sin\theta)^2\right]_{ret} d\Omega$$

<u>Obs</u>: um observador no plano da órbita $(\alpha = \pi/2)$ detectará a radiação duas vezes por período, na forma de dois pulsos largos com polarizações alternadas.

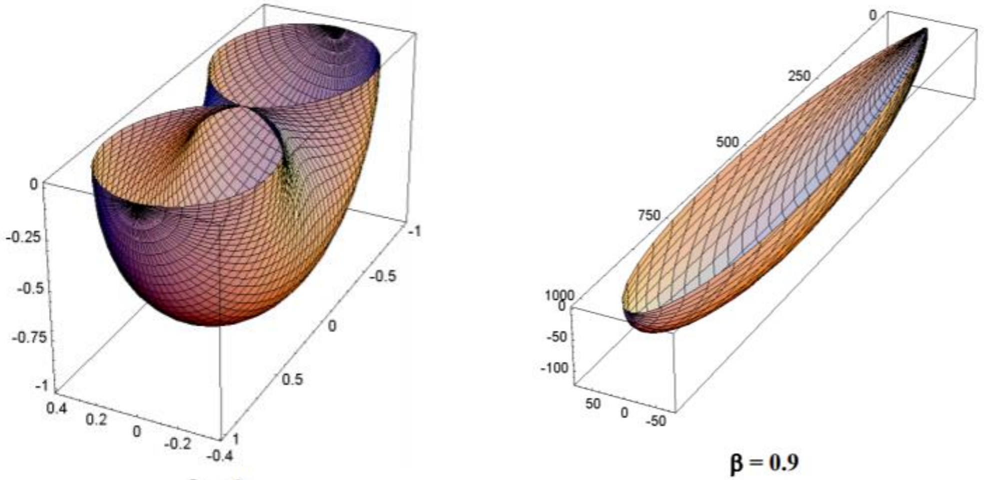
<u>Radiação Síncrotron</u>: $\beta \leq 1$

Denominador na expressão da potência radiada se torna bastante pequeno se

$$\cos\theta = \sin\alpha\cos\varphi \approx 1 \Rightarrow \varphi \approx 0\,;\ \alpha = \pi/2$$

$$\left(\frac{dU}{dt'}\right) d\Omega = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\left[\dot{v}_q^2\,\frac{(\beta-\cos\theta)^2}{(1-\beta\cos\theta)^5}\right]_{ret} d\Omega$$

$\cos\theta = \beta \to \sin\theta = 1/\gamma \Rightarrow$ intensidade nula



$\beta = 0$ $\qquad$ $\beta = 0.9$

Klauss Wille – Synchrotron Radiation

Portanto, para $\gamma \gg 1$. o diagrama de radiação é caracterizado por uma abertura

$$\Delta\theta \approx \frac{1}{\gamma}$$

Esta intervalo angular é varrido pela carga em um intervalo de tempo

$$\Delta t' = \frac{\Delta\theta}{\omega_0} \approx \frac{1}{\gamma\omega_0},$$

que se desloca na direção do observador uma distância elementar $\Delta\ell' = v_q \Delta t'$. Este mede um pulso comprimido

$$\Delta t = \Delta t' - \frac{\Delta\ell'}{c} = (1-\beta)\frac{1}{\gamma\omega_0} = \frac{(1-\beta)(1+\beta)}{(1+\beta)}\frac{1}{\gamma\omega_0} \approx \frac{1}{2\gamma^3\omega_0}$$

Tipicamente, a largura espectral de um pulso de largura temporal $\Delta t$ é $\Delta\omega \approx 1/\Delta t$. Portanto, na situação ultra relativística a frequência máxima da radiação sincrotron é da ordem de

$$\boxed{\omega_{max} \approx 2\gamma^3\omega_0}$$

Diagrama de radiação no caso geral

$$\frac{dU}{dt'}d\Omega = \epsilon_0 c\left[E_{rad}^2 sR\right]_{ret} d\Omega;\ E_{rad} \propto \vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - R\vec{\beta}\right) \times \dot{\vec{v}}_q\right]$$

Intensidade se anula quando $\left(\vec{R} - R\vec{\beta}\right) \parallel \dot{\vec{v}}_q$.

Método gráfico para determinar os lobos

1. Traçar um círculo de raio $R$ centrado na posição da carga.
2. Traçar os vetores $R\vec{\beta}$ e $\dot{\vec{v}}_q$.
3. Traçar uma linha passando pela ponta do vetor$R\vec{\beta}$ e paralela a $\dot{\vec{v}}_q$.
4. Nos dois pontos onde encontrar o círculo, essa linha representará os vetores $\vec{R} - R\vec{\beta}$ paralelos a$\dot{\vec{v}}_q$.