02-07-2020

quinta-feira, 2 de julho de 2020 16:08

Logaritmo

$a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$

$$\boxed{\log_a b = c \iff a^c = b > 0}$$

$$a^{\log_a b} = b \quad \text{e} \quad \log_a a^c = c$$

Propriedades:

1) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

2) $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

3) $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b\, c^{-1}) \overset{1)}{=} \log_a b + \log_a c^{-1}$

$\overset{2)}{=} \log_a b - \log_a c$

4) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $c > 0$ e $c \neq 1$

Notação: $\boxed{\log_e b = \ln b}$

Quem é e: Provamos que o limite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

existe e é um número real

Batizamos $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \cong e \cong 2,71828$

Fica como exercício provar que $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Dá para provar que $e \notin \mathbb{Q}$ (irracional)

Dado $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$ contra-domínio

domínio

Dado $a \in \mathbb{R}$, $a>0$ e $a \neq 1$

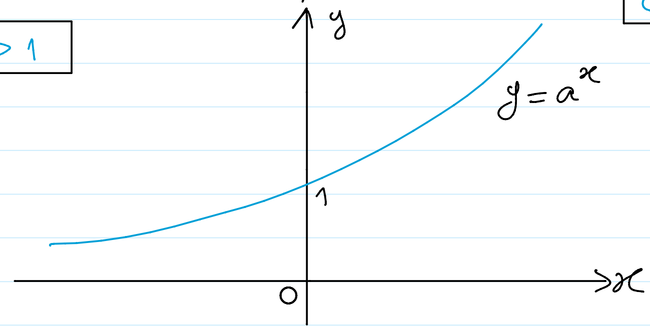
contra-domínio

domínio

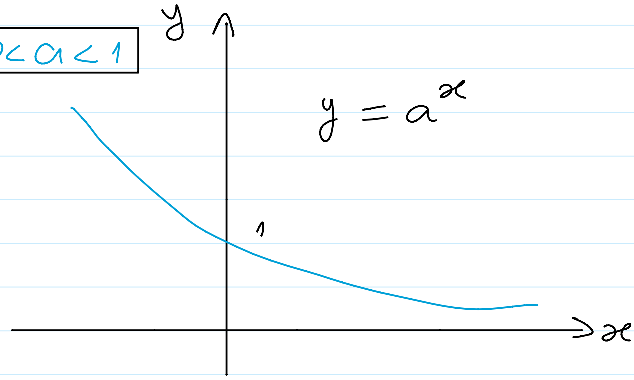
Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} =]0, +\infty[$

dada por $f(x) = a^x$

$\boxed{a>1}$



$\boxed{0<a<1}$



$Im f = \mathbb{R}_+^* \Rightarrow f$ é sobrejetora (a imagem coincide com o contra-domínio)

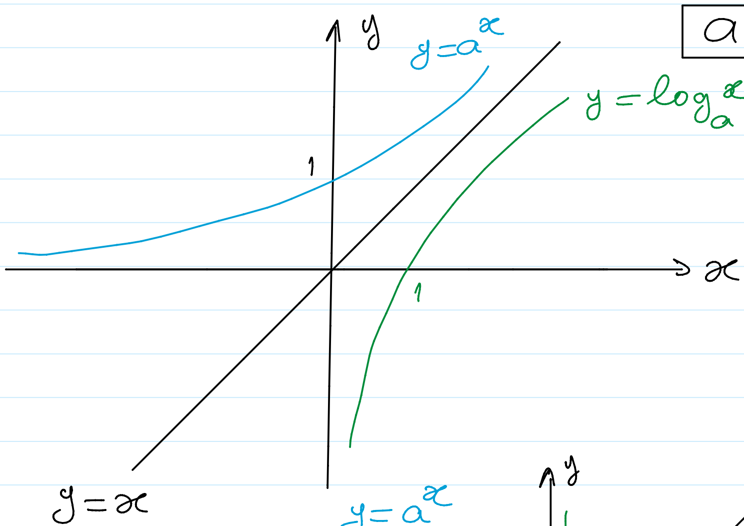
f é injetora

f tem inversa, $f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, notação $f^{-1}(x) = \log_a x$

Sei que $\begin{cases} f(f^{-1}(y)) = y, & \forall y \in \mathbb{R}_+^* \\ f^{-1}(f(x)) = x, & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\begin{cases} a^{\log_a y} = y, & \forall y \in \mathbb{R}_+^* \\ \log_a a^x = x, & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\boxed{a>1}$

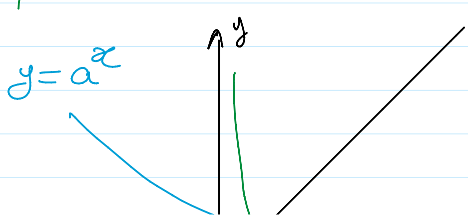


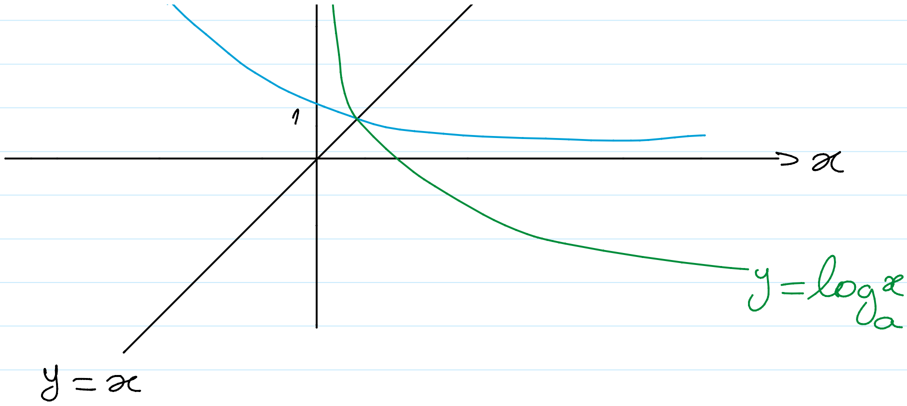
$\boxed{\log_a 1 = 0}$

$b = \log_a 1 \Rightarrow a^b = 1 = a^0$

$\Rightarrow a^b = a^0 \Rightarrow b = 0$

$\boxed{0<a<1}$





Derivadas: Definição $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

onde $h = x - x_0$ e daí $x = x_0 + h$

Regras de derivação:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(ku)' = ku'$

3) $(uv)' = u'v + uv'$

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Regra da cadeia

Se g derivável em x_0 e f derivável em $g(x_0)$,
então $f(g(x))$ é derivável em x_0 e $y' = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$

$$\boxed{y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x))\, g'(x)}$$

Uma demonstração que não vale no caso geral

$h(x) = f(g(x))$

$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$

supor que existe $r > 0$ tq.
$g(x) \neq g(x_0)$ se $0 < |x - x_0| < r$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}$$

Como g é derivável em x_0 então g é contínua em x_0

seja $\boxed{u = g(x)}$, temos que $x \to x_0 \Rightarrow g(x) \to g(x_0)$

Seja $\boxed{u_0 = g(x_0)}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{u \to u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} = f'(u_0)$$

$$= f'(g(x_0))$$

$$\therefore \quad h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Exercícios: Derivar

$$y = f(g(x))$$
$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

1) $y = (x^2 - 2x + 2)^{100}$

$$y' = 100(x^2 - 2x + 2)^{99}(x^2 - 2x + 2)'$$

$$= 100(x^2 - 2x + 2)^{99}(2x - 2)$$

2) $y = \operatorname{sen}(x^4 - x^3 - 1)$

$$y' = \cos(x^4 - x^3 - 1)(x^4 - x^3 - 1)'$$

$$= (4x^3 - 3x^2)\cos(x^4 - x^3 - 1)$$

3) $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

4) $y = \ln x = \log_e x$

$$① \; e^{\ln x} = x \qquad \left(e^{\log_e x} = x, \ \forall x > 0 \right)$$

suponhamos que $y = \ln x$ é derivável

Vamos derivar ① usando a regra da cadeia

$$e^{\ln x} (\ln x)' = 1 \Rightarrow x (\ln x)' = 1 \Rightarrow \boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Resumo: $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$

5) $y = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

$$y' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' = e^{\frac{x+1}{x-1}} \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1.(x-1) - (x+1).1}{(x-1)^2} = e^{\frac{x+1}{x-1}} \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2} \quad e^{\frac{x-1}{x+1}}$$

6) $y = a^x > 0, \; a > 0$ e $a \neq 1$

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow \ln y(x) = x \ln a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) = 1 . \ln a \Rightarrow y'(x) = y(x) \ln a$$

$$\Rightarrow y' = a^x \ln a$$

Resumo: $\begin{cases} y = a^x, & a > 0 \text{ e } a \neq 1 \\ y' = a^x \ln a \end{cases}$

$$y = e^x \Rightarrow y = e^x \ln e = e^x \overbrace{\log_e e}^{=1} = e^x$$

$\log_a^a = b \Rightarrow a^b = a \Rightarrow a^b = a^1 \Rightarrow b = 1$

$\Rightarrow \log_a^a = 1$

7) $y = \log_a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$

$$y = \frac{\log_e^x}{\log_e^a} = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

Resumo: $\begin{cases} y = \log_a^x \\ y' = \dfrac{1}{x \ln a} \end{cases}$

8) $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$

$y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$y' = n x^{n-1}$

$\ln y = \ln x^\alpha = \alpha \ln x$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \alpha \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{\alpha \cdot y}{x} = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

Resumo: $\begin{cases} y = x^\alpha \\ y' = \alpha x^{\alpha - 1} \end{cases}$

9) $y = \sqrt{x}$

$$y = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

10) $y = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

$$y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n} \sqrt[n]{x^{m-n}}$$

OBS: $\begin{cases} y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a \\ y = x^a \Rightarrow y' = a x^{a-1} \\ a \text{ uma constante} \end{cases}$

$y = 2^x \Rightarrow y' = x\,2^{x-1}$ ERRADO

o correto é $y' = 2^x \ln 2$

11) $y = x^x$

$\ln y = \ln x^x = x \ln x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln x$

$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = x' \ln x + x (\ln x)' = 1 \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$\Rightarrow y' = y(\ln x + 1) \Rightarrow y' = x^x (\ln x + 1)$

12) $y = \ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\right)$

$y = f(g(x))$

$y' = f'(g(x))\, g'(x)$

$y' = \frac{x^2-x-1}{x^2+x+1} \cdot \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\right)'$

$= \frac{\cancel{x^2-x-1}}{x^2+x+1} \cdot \frac{(x^2+x+1)'(x^2-x-1) - (x^2+x+1)(x^2-x-1)'}{(x^2-x-1)^{\cancel{2}}}$

$= \frac{(2x+1)(x^2-x-1) - (x^2+x+1)(2x-1)}{(x^2+x+1)(x^2-x-1)}$