MAP2110 - Notas de aula e exercícios

Apostol Cap 12 - 12.8, 12.9, 12.10, 12.11

Saulo R. M. Barros

Departamento de Matemática Aplicada - IME-USP

Exercícios:

Seja $S = \{\overset{s_1}{(1,1,1)}, \overset{s_2}{(0,1,2)}, \overset{s_3}{(1,0,-1)}\}$ e $T = \{\overset{t_1}{(2,1,0)}, \overset{t_2}{(2,0,-2)}\}$

Mostre que $L(T) \subseteq L(S)$.

- Basta verificar que os vetores t_1 e t_2 de t se encontram em $L(S)$. De fato, $t_1 = 2s_1 - s_2$ e $t_2 = 2s_3$

Logo, se $t \in L(T)$ então $t = at_1 + bt_2$

e $\therefore$ $t = a(2s_1 - s_2) + b(2s_3) = 2as_1 - as_2 + 2bs_3 \in L(S)$.

——— x ———

Determine base de V_3 contendo $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,1,1)$.

- Para tal basta acrescentar um vetor u_3 que não pertença a $L(\{u_1, u_2\})$.

$v \in L(u_1, u_2) \Leftrightarrow v = a u_1 + b u_2 = (b, a+b, a+b)$

Para que $u_3 \notin L(\{u_1, u_2\})$, basta tomar:

$u_3 = (\alpha, \beta, \gamma)$, com $\beta \neq \gamma$.

——— x ———

Mostre que $L(A \cap B) \subseteq L(A) \cap L(B)$

Seja então $A = \{C_1, \dots, C_k, A_{k+1}, \dots A_l\}$ e $B = \{C_1, \dots, C_k, B_{k+1}, \dots B_m\}$

onde $A \cap B = \{C_1, \dots, C_k\}$

$\therefore$ portanto se $V \in L(A \cap B)$, $V = \sum_{i=1}^{k} a_i C_i$ $\in L(A)$ $\in L(B)$.

Exemplo mostrando que não são iguais:

$A = \{(0,1), (1,1)\}$ $B = \{(0,1), (1,0)\}$.

$A \cap B = \{(0,1)\}$ $L(A \cap B) = \{(0,\alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$, $L(B) = L(A) = \mathbb{R}^2$

Exercício: Determine subconjunto maximal L.I. de

$$S=\{\overset{u_1}{(0,1,-1,2)},\ \overset{u_2}{(-1,2,0,1)},\ \overset{u_3}{(1,1,-3,5)},\ \overset{u_4}{(2,1,1,0)}\}$$

Usando o escalonamento (por linhas):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

Concluimos que u_3 é gerado por u_1 e u_2

pois $(u_3+u_2)-3u_1=0$

e $\therefore$ $u_3=3u_1-u_2$

Obs.: Também podemos escrever $u_1=\dfrac{u_2+u_3}{3}$ e $u_2=3u_1-u_3$

Assim, subconjuntos LI maximais de S são:

$\{u_1,u_2,u_4\}$, $\{u_1,u_3,u_4\}$ e $\{u_2,u_3,u_4\}$

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

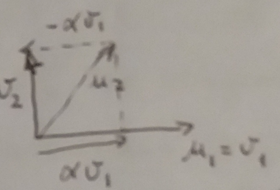
Ideia. Sejam u_1, u_2, u_3 vetores LI. Como a partir deles obter base ortogonal (ou ortonormal) do espaço gerado por u_1, u_2, u_3?

Tomemos $v_1 = u_1$. u_2 e u_1 são L.I. Vamos determinar v_2 em $L(\{u_1, u_2\})$ ortogonal a $u_1 = v_1$.

Tomando $v_2 = u_2 - \alpha v_1$ queremos: $v_2 \cdot v_1 = 0$

$$v_2 \cdot v_1 = u_2 \cdot v_1 - \alpha v_1 \cdot v_1 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}$$

geometricamente:



Note que subtraimos de u_2 sua projeção na direção de $u_1 = v_1$

Agora, no espaço $L(\{u_1, u_2, u_3\})$ queremos determinar v_3, ortogonal a v_1 e v_2.

Tomamos $v_3 = u_3 - \beta v_2 - \gamma v_1$

De $v_3 \cdot v_1 = 0$ temos $u_3 \cdot v_1 - \beta v_2 \cdot v_1 - \gamma v_1 \cdot v_1 = 0$

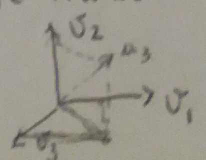
Já temos $v_2 \cdot v_1 = 0$. Assim $u_3 \cdot v_1 - \gamma v_1 \cdot v_1 = 0$

e portanto $\gamma = \dfrac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}$

Para que $v_3 \cdot v_2 = 0 \rightarrow u_3 \cdot v_2 - \beta v_2 \cdot v_2 - \gamma \underbrace{\cancel{v_1 \cdot v_2}}_{0} = 0$

$\therefore \beta = \dfrac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}$

Logo $v_3 = u_3 - \left(\dfrac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}\right) v_2 - \left(\dfrac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1$. Ou seja, retiramos de v_3 suas projeções nas direções de v_1 e v_2



O algoritmo de Gram-Schmidt (ortogonalização)

Dados $u_1, \dots, u_m$ L.I. determina $v_1, \dots v_m$ ortogonais.
(base de $L(\{u_1, \dots, u_m\})$).

$v_1 = u_1$
Para $i=2$ até m faça
  $v_i = u_i$
  Para $j=1$ até $i-1$ faça
    $v_i = v_i - \dfrac{u_i \cdot v_j}{v_j \cdot v_j} v_j$

$$v_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{u_i \cdot v_j}{v_j \cdot v_j} \right) v_j$$

Verifiquemos que se $v_1, \dots, v_{i-1}$ são ortogonais, então v_i é ortogonal a todos eles. Calculemos $v_i \cdot v_k$, com $1 \leq k \leq i-1$:

$$v_i \cdot v_k = u_i \cdot v_k - \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{u_i \cdot v_j}{v_j \cdot v_j} \right) v_j \cdot v_k$$

Como $v_j \cdot v_k = 0$ se $j \neq k$ obtemos:

$$v_i \cdot v_k = u_i \cdot v_k - \left(\frac{u_i \cdot v_k}{\cancel{v_k \cdot v_k}} \right) \cancel{v_k \cdot v_k} = u_i \cdot v_k - u_i \cdot v_k = 0.$$

mostrando o resultado.

→ Base ortonormal:

$v_1 = u_1 / \|u_1\|$
Para $i=2$ até m faça
  $v_i = u_i$
  Para $j=1$ até $i-1$ faça
    $v_i = v_i - (u_i \cdot v_j) v_j$
  $v_i = v_i / \|v_i\|$

$$v_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} (u_i \cdot v_j) v_j$$
$$v_i = v_i / \|v_i\|$$

<u>Exemplo</u>: Sejam $u_1=(0,1,-1,2)$, $u_2=(-1,2,0,1)$, $u_3=(3,1,1,0)$.
Construa base ortogonal de $L(\{u_1,u_2,u_3\})$.

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = u_2 - \frac{4}{6} v_1 = (-1,2,0,1)-\left(0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

$$v_2 = \left(-1,\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{-1}{3}\right)$$

$$v_3 = u_3 - \frac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = u_3 - 0\, v_1 - \left(\frac{-1}{10/3}\right) v_2$$

$$v_3 = (3,1,1,0) + \left(\frac{-3}{10},\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{-1}{10}\right) = \left(\frac{27}{10},\frac{7}{5},\frac{6}{5},\frac{-1}{10}\right)$$

<u>Exercício</u>: Determine base ortonormal de $L(S)$ onde

$$S=\{(1,-1,1,1),(1,1,1,1),(2,0,1,0)\}$$

x x

<u>Exemplo</u>: $u_1=(0,1,-1,2)$ $u_2=(-1,2,0,1)$, $u_3=(1,1,-3,5)$

$$v_1=u_1 \qquad v_2=(-1,4/3,2/3,-1/3)$$

$$v_3 = u_3 - \frac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 - \frac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = u_3 + v_2 - \frac{7}{3} v_1$$

$$v_3 = (1,1,-3,5) + (-1,4/3,2/3,-1/3) - (0,7/3,-7/3,14/3)$$

$$v_3 = (0,0,0,0) \quad !!$$

$\Longrightarrow u_1, u_2, u_3$ são L.D. !

<u>Lembre</u>: se $\{v_1,\dots,v_n\}$ base de V_n ortogonal e $v \in V_n$:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{v \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}\right) v_i$$

Determinantes:

Definição: Dada matriz $A_{n\times n}$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Onde S_n é o conjunto de todas as permutações de $\{1,2,\dots,n\}$ e $\operatorname{sgn}(\sigma)$ é o sinal da permutação definido como $(-1)^{kt}$, onde kt é o número de inversões simples de elementos do conjunto até se obter a permutação. Por exemplo, o sinal da permutação $(2,3,4,1)$ em S_4 é -1

$$(1,2,3,4) \to (2,1,3,4) \to (2,3,1,4) \to (2,3,4,1)$$

com $kt=3$.

Cálculo do determinante de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Note que a soma definindo $\det A$ tem $n!$ termos!
Neste caso, são 24.

$$\begin{aligned} \det A = {} & (0.2.-3.0) + (0.0.5.1) + (0.1.1.1) - (0.1.-3.1) - (0.0.1.0) - (0.2.5.1) \\ & -(1.-1.-3.0) - (1.0.5.2) - (1.1.1.1) + (1.-1.5.1) + (1.1.-3.2) + (1.0.1.0) \\ & + (-1.-1.1.0) + (-1.2.5.2) + (-1.1.1.1) - (-1.2.1.0) - (-1.-1.5.1) - (-1.1.1.2) \\ & + (2.0.1.2) + (2.2.1.1) + (2.-1.-3.1) - (2.-1.1.1) - (2.2.-3.2) - (2.0.1.1) \\ = {} & \underbrace{-1-5-6}_{-12} \underbrace{-20-1-5}_{-26} + \underbrace{2+4+6}_{12} + \underbrace{2+24}_{+26} \\ = {} & -12 - 26 + 12 + 26 \\ = {} & 0. \end{aligned}$$

Observações:
a) Esta forma de cálculo é inviável!
b) $\det = 0 \to$ vetores L.D.!