# Campo Electromagnético Produzido por Cargas em Movimento - III

→[B. Thidé; Electromagnetic Field Theory; Sec. Edition; Section 6.5]

[W. Panofsky and M. Phillips; Classical Electricity and Magnetism; Chap. 20]

## Campos de radiação

Na aula passada, vimos que os campos elétrico e magnético devido à aceleração de cargas em movimento decaem com o inverso da distância,

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\frac{1}{s^3}\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-R\vec{\beta}\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right]_{ret}; \vec{B}_{rad}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\left[\frac{\vec{R}}{R}\right]_{ret}\times\vec{E}_{rad}(\vec{r},t)$$

$$s = R - \vec{R}\cdot\vec{\beta};\ \ \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'(t');\ \ t'_{ret} = t - \frac{R}{c} = t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'(t'_{ret})|;\ \vec{\beta} = \frac{\vec{v}_q(t')}{c}$$

Como já discutido anteriormente, esses campos são denominados *campos de radiação,* ou *campo electromagnético de radiação*, porque o vetor de Poynting correspondente decai com o inverso do quadrado da distância, de forma que a potência integrada em uma superfície fechada em torno da fonte permanece constante, independente da distância

## Campo de radiação para $|\vec{v}_q \ll c|$

Neste limite temos $s = R - \vec{R}\cdot\vec{\beta} \approx R$, de forma que as expressões para os campos ficam

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3}\vec{R}\times\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}_q\right);\;\; \vec{B}_{rad}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3 R^4}\vec{R}\times\left[\vec{R}\times\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}_q\right)\right]$$

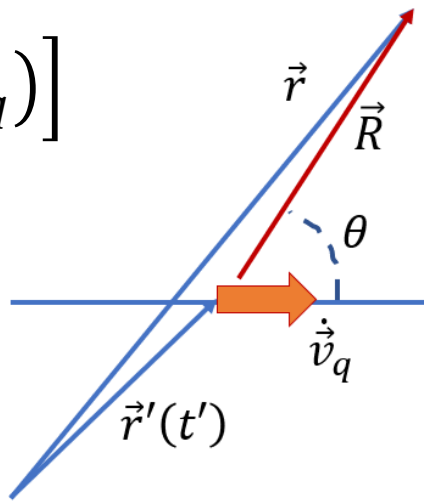
$$\therefore \vec{B}_{rad}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3 R^4}\left[\vec{R}\cdot\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}_q\right)\vec{R} - R^2\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}_q\right)\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3 R^4}\left(\dot{\vec{v}}_q\times\vec{R}\right)$$

O vetor de Poynting é então dado por

$$\vec{S}_{rad} = -\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3}\right]^2\frac{1}{cR}\left[\vec{R}\times\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}_q\right)\right]\times\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}_q\right)$$

$$\vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^3}\right]^2\frac{1}{cR}\left[\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}_q\right)^2\vec{R} - \left\{\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}_q\right)\cdot\vec{R}\right\}\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}_q\right)\right]$$

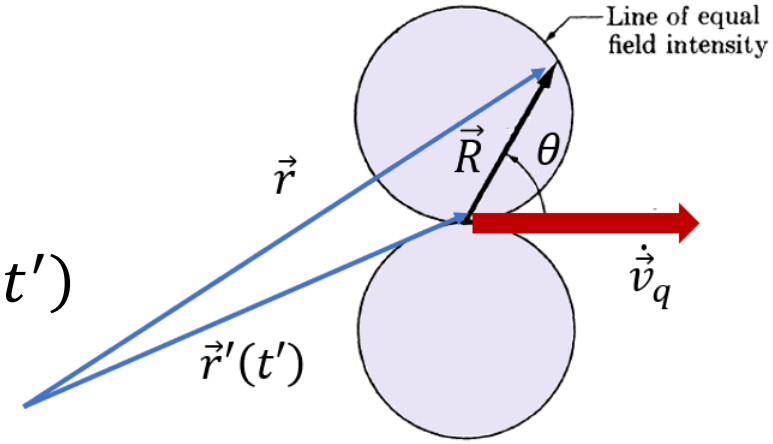
$$\boxed{\vec{S}_{rad} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 R^4}\left(\vec{R}\times\dot{\vec{v}}_q\right)^2\frac{\vec{R}}{R} = \frac{q^2(\sin\theta)^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 R^2}\left(\dot{\vec{v}}_q\right)^2\frac{\vec{R}}{R}}$$



onde $\theta$ é o ângulo entre a direção da aceleração e o ponto de observação.

Radiação de dipolo

Suponhamos que a carga em movimento seja um elétron oscilando em torno de uma posição de equilíbrio, de forma que a equação de movimento seja




$$\vec{r}_q'(t') = \vec{d}\cos(\omega t') \therefore \dot{\vec{v}}_q = -\omega^2 \vec{d}\cos(\omega t')$$

O vetor de Poynting fica

$$\vec{S}_{rad} = \frac{q^2(\sin\theta)^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 R^2}\omega^4 d^2(\cos\omega t')^2\frac{\vec{R}}{R}$$

Lembrando que o momento de dipolo é dado por $\vec{p} = q\vec{d}$ e a definição da impedância intrínseca do vácuo, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ , a média do vetor de Poynting em um período é dada por

$$\langle\vec{S}_{rad}\rangle = \frac{Z_0\omega^4 p^2}{32\pi^2 c^2 R^2}(\sin\theta)^2\frac{\vec{R}}{R};\ \ \vec{R} \cong \vec{r} - \vec{r}_0;\ \vec{r}_0 \rightarrow \textit{centro do dipolo}$$

Aceleração paralela à velocidade – radiação de frenamento (*bremsstrahlung*)

$$\dot{\vec{v}}_q \parallel \vec{v}_q \; ; \; \beta \text{ arbitrário}$$

$$\left(\vec{R} - R\vec{\beta}\right) \times \dot{\vec{v}}_q = \vec{R} \times \dot{\vec{v}}_q \Longrightarrow \vec{E}_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} \vec{R} \times \left(\vec{R} \times \dot{\vec{v}}_q\right); \; \vec{B}_{rad} = \frac{qR}{4\pi\epsilon_0 c^3 s^3} \dot{\vec{v}}_q \times \vec{R}$$

O vetor de Poynting fica

$$\vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_{rad} \times \vec{B}_{rad} = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3}\right]^2 \frac{R}{c} \left(\vec{R} \times \dot{\vec{v}}_q\right) \times \left[\vec{R} \times \left(\vec{R} \times \dot{\vec{v}}_q\right)\right]$$

$$\therefore \vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3}\right]^2 \frac{R}{c} \left(\vec{R} \times \dot{\vec{v}}_q\right)^2 \vec{R}$$

Considerando $\theta$ o ângulo entre $\vec{R}$ e $\dot{\vec{v}}_q$ e que $s = R - \vec{R} \cdot \vec{\beta} = R(1 - \beta \cos\theta)$, obtemos

$$\vec{S}_{rad} = \frac{\mu_0 q^2 \dot{v}_q^2}{16\pi^2 c R^2} \frac{(\sin\theta)^2}{(1 - \beta\cos\theta)^6} \frac{\vec{R}}{R}$$

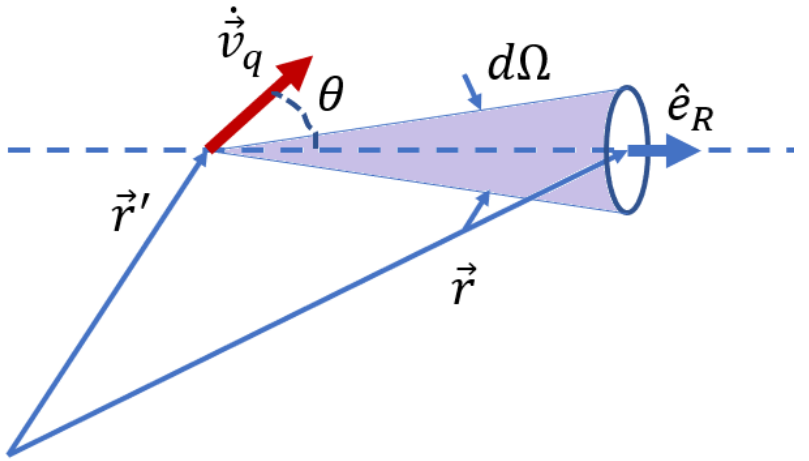
## Energia perdida instantaneamente pela carga

$\vec{S}_{rad}$ → potência por unidade de área na posição $\vec{r}$, no instante $t$.

Energia perdida pela carga por unidade de tempo → potência radiada na posição $\vec{r}'(t')$.

Potência na posição $\vec{r}$, por unidade de ângulo sólido centrado na posição retardada da carga:

$$\frac{dU}{dt}d\Omega = \hat{e}_R \cdot \vec{S}_{rad} R^2 d\Omega = \frac{\mu_0 q^2 \dot{v}_q^2}{16\pi^2 c}\frac{(\sin\theta)^2}{(1-\beta\cos\theta)^6}d\Omega$$



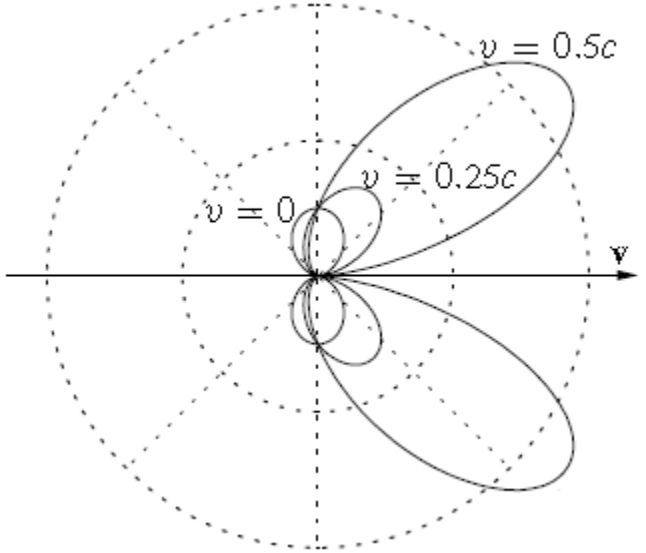

Energia medida no intervalo $dt$ na posição $\vec{r}$ tem que ser igual à perdida pela carga no intervalo $dt'$ correspondente

$$\frac{dU}{dt}d\Omega = \left(\frac{dt'}{dt}\right)_{\vec{r}}\frac{dU}{dt'}d\Omega = \frac{R}{s}\frac{dU}{dt'}d\Omega \rightarrow \frac{dU}{dt'}d\Omega = \frac{s}{R}\frac{dU}{dt}d\Omega = (1-\beta\cos\theta)\frac{dU}{dt}d\Omega$$

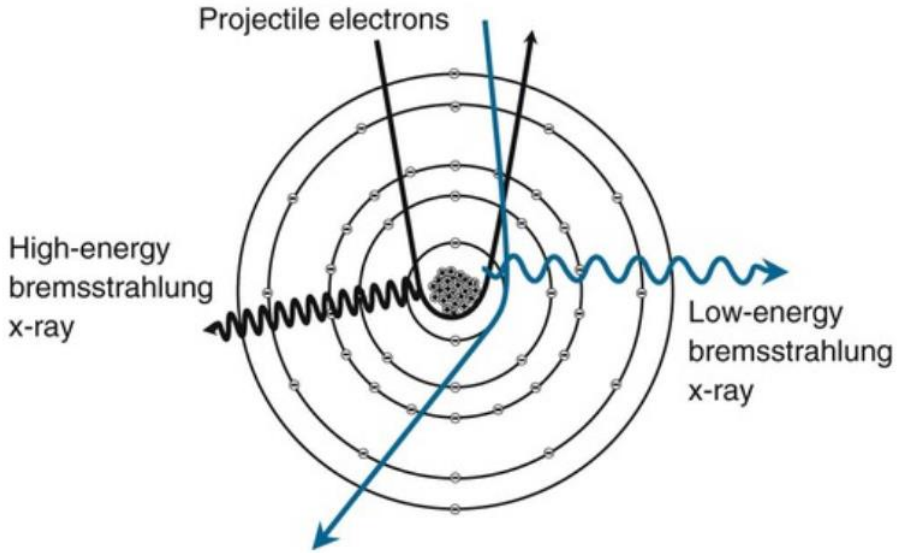
portanto,

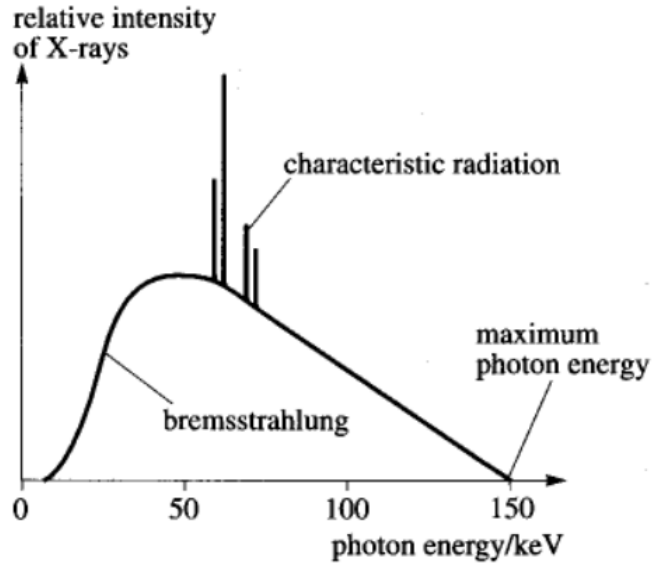
$$\boxed{\frac{dU}{dt'}d\Omega = \frac{\mu_0 q^2 \dot{v}_q^2}{16\pi^2 c}\frac{(\sin\theta)^2}{(1-\beta\cos\theta)^5}d\Omega}$$

## Diagrama de radiação




## Interação de feixes com a matéria: cálculo correto tem que ser quântico



Exercícios

1. Siga detalhadamente a explicação dada no livro do Bo Thidé, após a equação 6.158, para a diferença entre a energia radiada instantaneamente pela carga e a medida na posição $\vec{r}$, no instante $t$.
2. Integre a expressão para $(dU/dt')d\Omega$ sobre todo o ângulo sólido e obtenha a expressão para a potência total radiada pela carga (Bo Thidé, equação 6.163).
3. Siga detalhadamente o exemplo 6.4 do Bo Thidé, que calcula a energia radiada em um pequeno intervalo de tempo.