

MAC0317/MAC5920

Introdução ao Processamento de Sinais Digitais

**Seção 6.6: A Transformada Discreta Wavelet 2D e o padrão
JPEG 2000**

Seção 6.6.1: Transformadas Bidimensionais

Já vimos nos casos da DFT e da DCT como é simples criar transformadas 2D a partir de transformadas 1D:

basta transformar todas as linhas e depois todas as colunas da matriz, ou vice-versa (primeiro colunas e depois linhas).

A transformada inversa seguirá o mesmo procedimento:

aplicar a transformada inversa em todas as linhas e depois em todas as colunas da matriz, ou vice-versa.

No caso da Transformada Wavelet Discreta (DWT) representada pelas matrizes W_N^a (análise em \mathbb{C}^N) e W_N^s (síntese em \mathbb{C}^N), isso corresponde à definição abaixo:

Definição 6.6.1: Transformada Wavelet Discreta 2D

$$\text{Análise: } \mathcal{W}_{M \times N}^a(A) = W_M^a A (W_N^a)^T$$

$$\text{Síntese: } \mathcal{W}_{M \times N}^s(\hat{A}) = W_M^s \hat{A} (W_N^s)^T.$$

Observe que $W_M^a W_M^s = I_{M \times M}$ e $W_N^a W_N^s = I_{N \times N}$, logo para qualquer imagem $A \in \mathcal{M}_{M \times N}(\mathbb{C})$ vale

$$\mathcal{W}_{M \times N}^s(\mathcal{W}_{M \times N}^a(A)) = W_M^s W_M^a A (W_N^a)^T (W_N^s)^T = A$$

(como já seria de se esperar).

Estrutura da DWT 2D

Considerando que a aplicação da DWT separa cada linha e cada coluna em coeficientes de aproximação (primeira metade) e coeficientes de detalhes (segunda metade), podemos antecipar que a matriz $\hat{A} = \mathcal{W}_{M \times N}^a(A) = W_M^a A (W_N^a)^T$ será formada por 4 blocos:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} LL \text{ (aproximação)} & HL \text{ (detalhes vert.)} \\ LH \text{ (detalhes horiz.)} & HH \text{ (detalhes diag.)} \end{bmatrix},$$

onde as letras L=Low e H=High se referem aos filtros passa-baixas e passa-altas, considerando (por convenção) a aplicação da DWT primeiro nas linhas, depois nas colunas. Para enxugar a notação, usaremos as iniciais para indicar os coeficientes de **A**proximação, detalhes **V**erticais, detalhes **H**orizontais e detalhes **D**igonais, todos de 1º nível:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 & V_1 \\ H_1 & D_1 \end{bmatrix}.$$

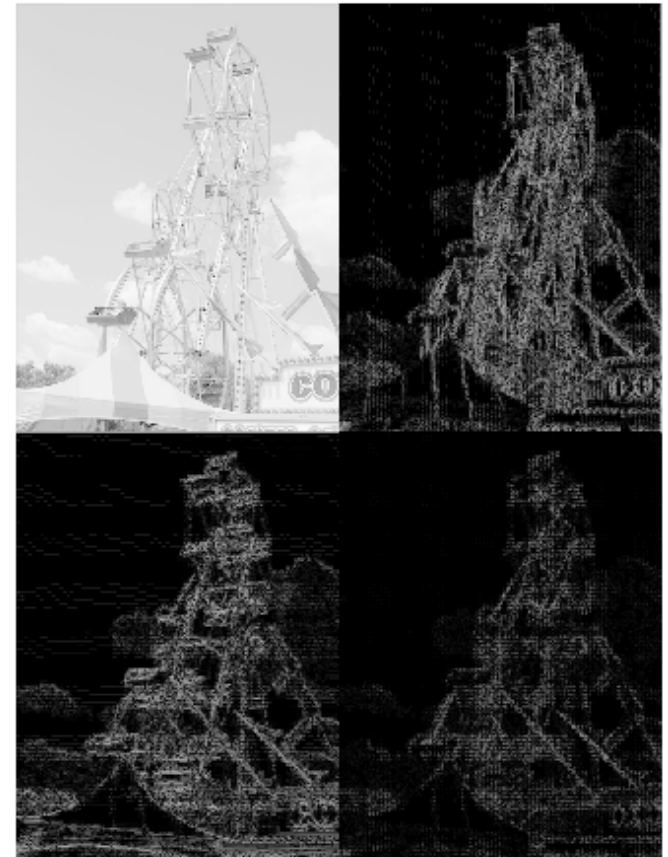
```
In [4]: display(Markdown('#### <p style="text-align: center;">Exemplo 6.10, Figura 6.16  
</p>'))  
plot_dwt2(1)
```

Exemplo 6.10, Figura 6.16

Imagem original



DWT (Le Gall 5/3) de 1 etapa(s)



Seção 6.6.2: Transformada DWT 2D Multi-Estágios

Na definição 6.6.1 não faz nenhuma diferença quais são as matrizes utilizadas para as transformadas direta e inversa, contanto que as matrizes de síntese sejam de fato as inversas das matrizes de análise. Assim, a definição da transformada em r estágios é simplesmente:

Definição 6.6.2

$$\begin{aligned}\text{Análise: } \mathcal{W}_{M \times N}^{a,(r)}(A) &= W_M^{a,(r)} A (W_N^{a,(r)})^T \\ \text{Síntese: } \mathcal{W}_{M \times N}^{s,(r)}(\hat{A}) &= W_M^{s,(r)} \hat{A} (W_N^{s,(r)})^T.\end{aligned}$$

Observação 6.3: em análise de imagens é comum chegar-se a $r = 4$ ou 5 níveis, mas em teoria é possível aprofundar a análise até um máximo de $r = \lfloor \log_2(\min\{M, N\}) \rfloor$.

Analogamente ao que observamos na transformada unidimensional, cada novo estágio aprofunda a análise apenas nos coeficientes de aproximação do estágio anterior, subdividindo-os em novos coeficientes de aproximação, detalhes horizontais, detalhes verticais e detalhes diagonais. Assim uma transformada em 2 estágios terá a estrutura:

$$\mathcal{W}_{M \times N}^{a,(2)}(A) = \left[\begin{array}{cc|c} \begin{bmatrix} A_2 & V_2 \\ H_2 & D_2 \end{bmatrix} & V_1 \\ \hline H_1 & D_1 \end{array} \right],$$

onde

$$\begin{array}{lll} A_2 = \text{aprox } 2^\circ \text{ nível} & V_2 = \text{det. vert. } 2^\circ \text{ nível} & V_1 = \text{det. vert. } 1^\circ \text{ nível} \\ H_2 = \text{det. hor. } 2^\circ \text{ nível} & D_2 = \text{det. diag. } 2^\circ \text{ nível} & \\ H_1 = \text{det. hor. } 1^\circ \text{ nível} & & D_1 = \text{det. diag. } 1^\circ \text{ nível.} \end{array}$$

No caso de 3 níveis, teremos:

$$\mathcal{W}_{M \times N}^{a,(3)}(A) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & V_3 \\ H_3 & D_3 \end{bmatrix} & V_2 \\ & H_2 & D_2 \\ & & H_1 & D_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

A generalização para r níveis segue o mesmo padrão, sendo que no nível r teremos um único bloco A_r de coeficientes de aproximação e $3r$ blocos da forma V_n , H_n e D_n para os coeficientes de detalhes verticais, horizontais e diagonais dos níveis $n = 1, 2, \dots, r$.


```
In [9]: display(Markdown('#### <p style="text-align: center;">Figura 6.17</p>'))  
w = interactive(plot_dwt2, etapa=N)  
display(VBox([w.children[0], w.children[1]], layout=Layout(align_items='center'  
)));w.update()
```

Figura 6.17

Seção 6.6.3: Aproximação e detalhes para imagens

Assim como no caso unidimensional, é possível considerar reconstruções da imagem a partir de cada pedaço de uma DWT. Por exemplo, para o 1º nível:

$$\mathcal{W}_{M \times N}^a(A) = \begin{bmatrix} A_1 & V_1 \\ H_1 & D_1 \end{bmatrix},$$

temos

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{W}_{M \times N}^s \left(\begin{bmatrix} A_1 & V_1 \\ H_1 & D_1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathcal{W}_{M \times N}^s \left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + \mathcal{W}_{M \times N}^s \left(\begin{bmatrix} 0 & V_1 \\ H_1 & D_1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \alpha_1(A) + \delta_1(A), \end{aligned}$$

onde $\alpha_1(A) \in \mathcal{M}_{M \times N}(\mathbb{C})$ é a reconstrução a partir dos coeficientes de aproximação de nível 1, e $\delta_1(A)$ é a reconstrução a partir de todos os coeficientes de detalhes de nível 1.

No caso da transformada em 2 estágios:

$$\mathcal{W}_{M \times N}^{a,(2)}(A) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & V_2 \\ H_2 & D_2 \end{bmatrix} & V_1 \\ H_1 & D_1 \end{bmatrix},$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{W}_{M \times N}^{s,(2)} \left(\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & V_2 \\ H_2 & D_2 \end{bmatrix} & V_1 \\ H_1 & D_1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathcal{W}_{M \times N}^{s,(2)} \left(\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + \mathcal{W}_{M \times N}^{s,(2)} \left(\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & V_2 \\ H_2 & D_2 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &\quad + \mathcal{W}_{M \times N}^{s,(2)} \left(\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & V_1 \\ H_1 & D_1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \alpha_2(A) + \delta_2(A) + \delta_1(A). \end{aligned}$$

```
In [20]: display(Markdown('#### <p style="text-align: center;">Figuras 6.18 e 6.19</p>'))  
w = interactive(plot_dwt2_compression, etapa=N)  
display(VBox([w.children[0], w.children[1]], layout=Layout(align_items='center'  
)));w.update()
```

Figuras 6.18 e 6.19

Seção 6.6.4: O padrão JPEG 2000

O objetivo dessa seção é apenas indicar os passos do padrão JPEG 2000:

1. Separação em componentes de cor R, G e B
2. Subtração da componente d.c.
3. Segmentação em blocos (como na seção 3.7)
4. DWT (usando Daubechies 9/7 ou Le Gall 5/3)
5. Quantização (como na seção 3.8)
6. Compressão (codificação baseada em entropia)