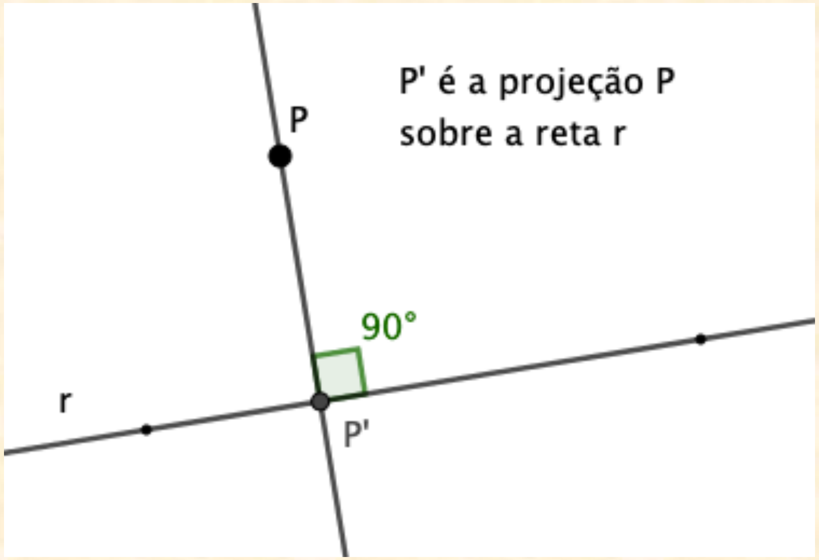
MAT0105 – Geometria Analítica

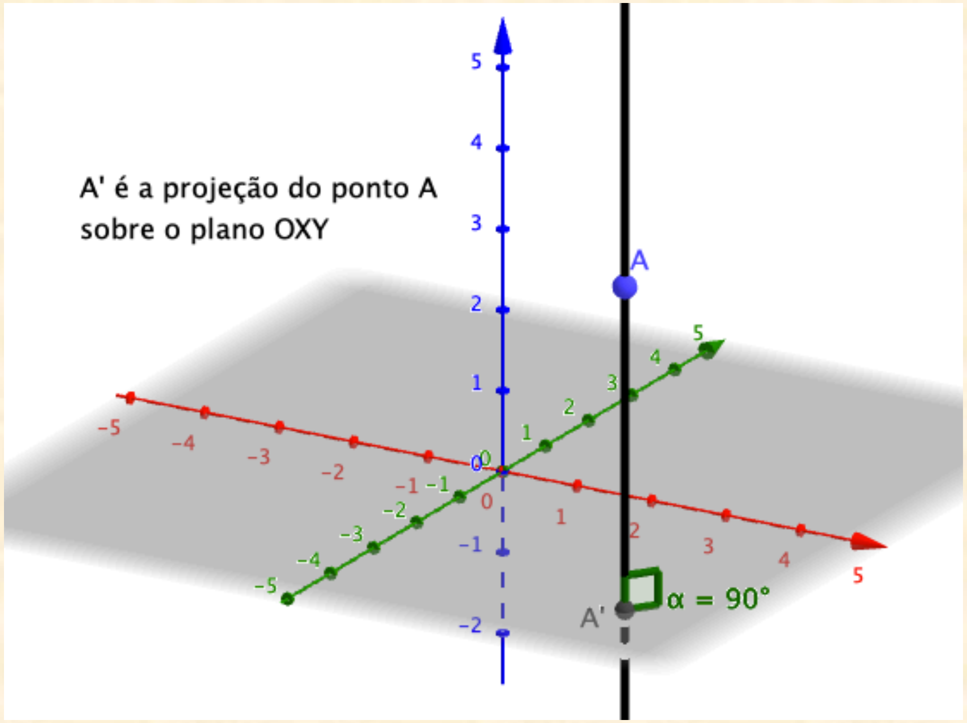
Projeção Ortogonal de Vetores

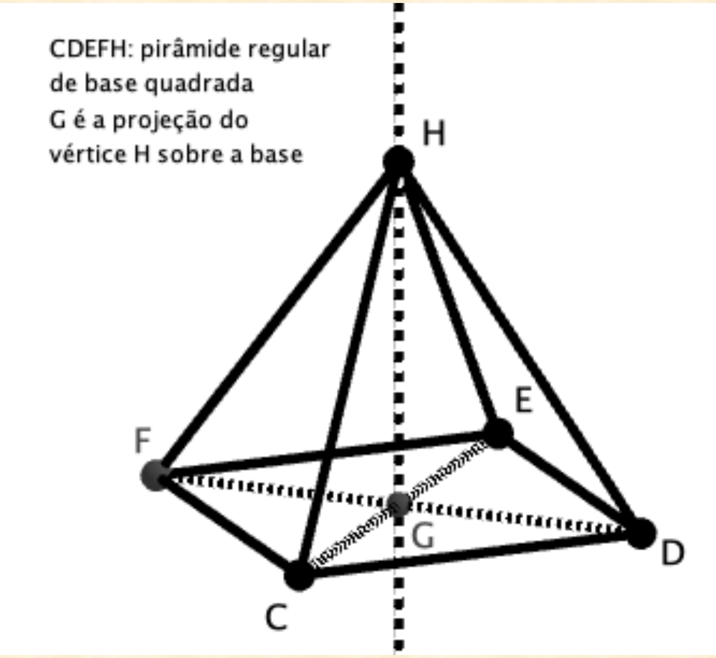
Profa. Ana Paula Jahn

anajahn@ime.usp.br

Projeções de pontos

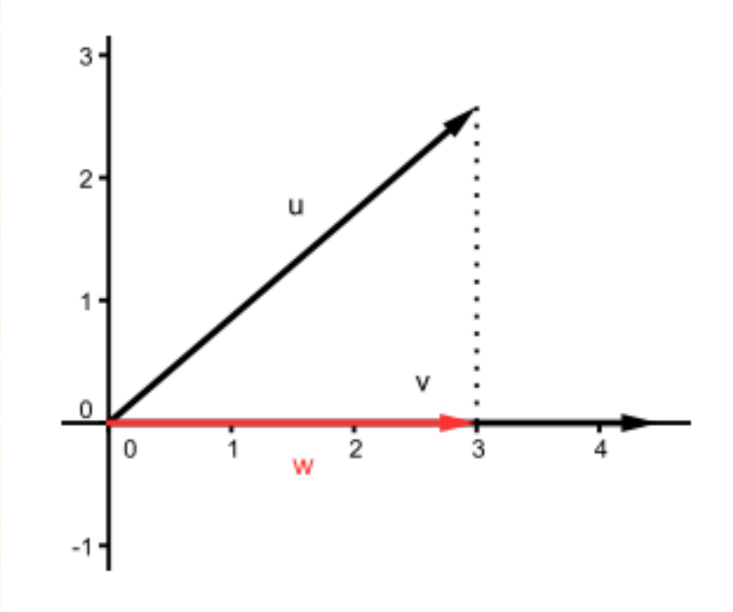




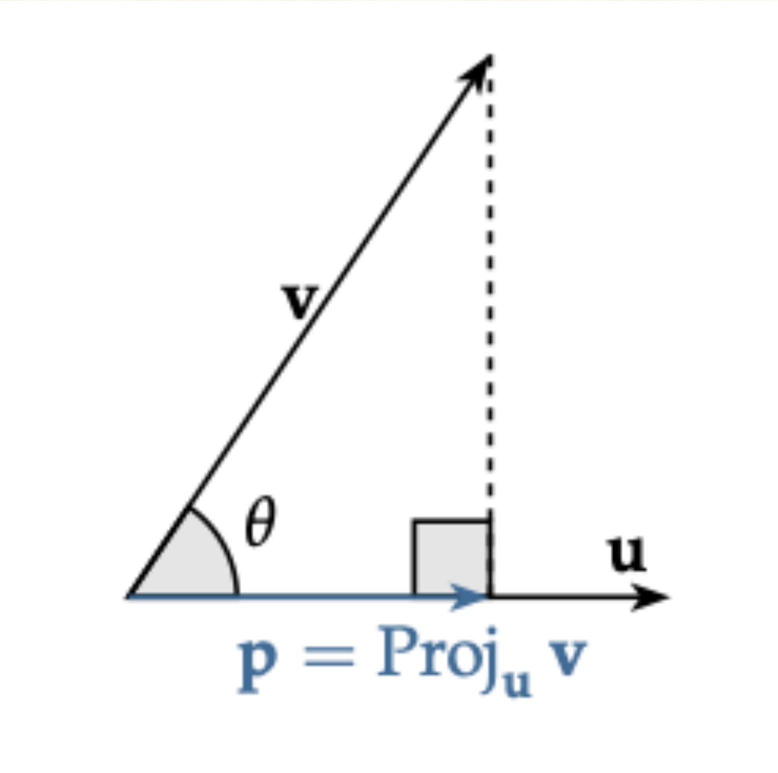


Obs.: Em todos os casos,
foi feita uma **projeção ortogonal**
(na direção perpendicular à reta
ou plano de projeção)

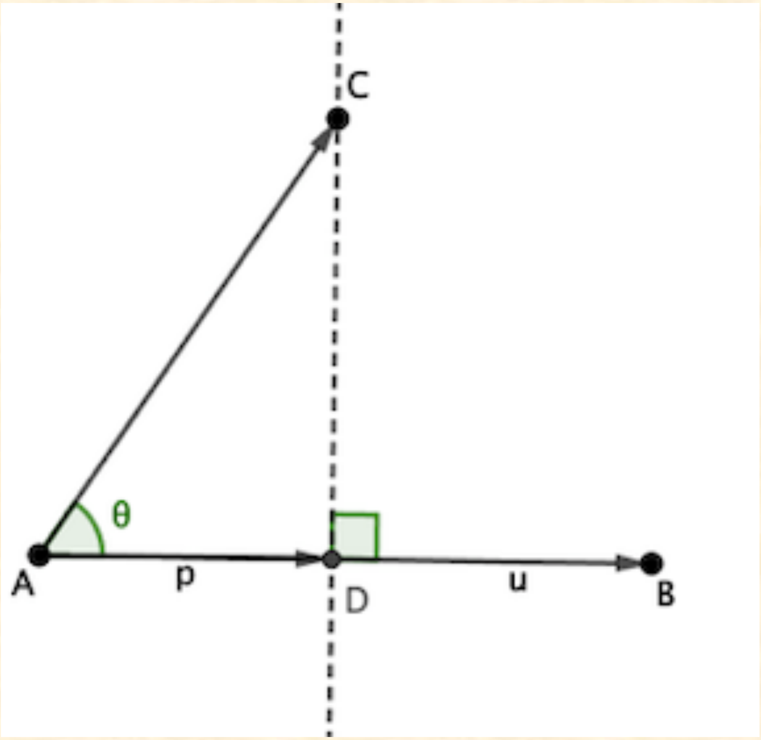
Projeção de Vetor



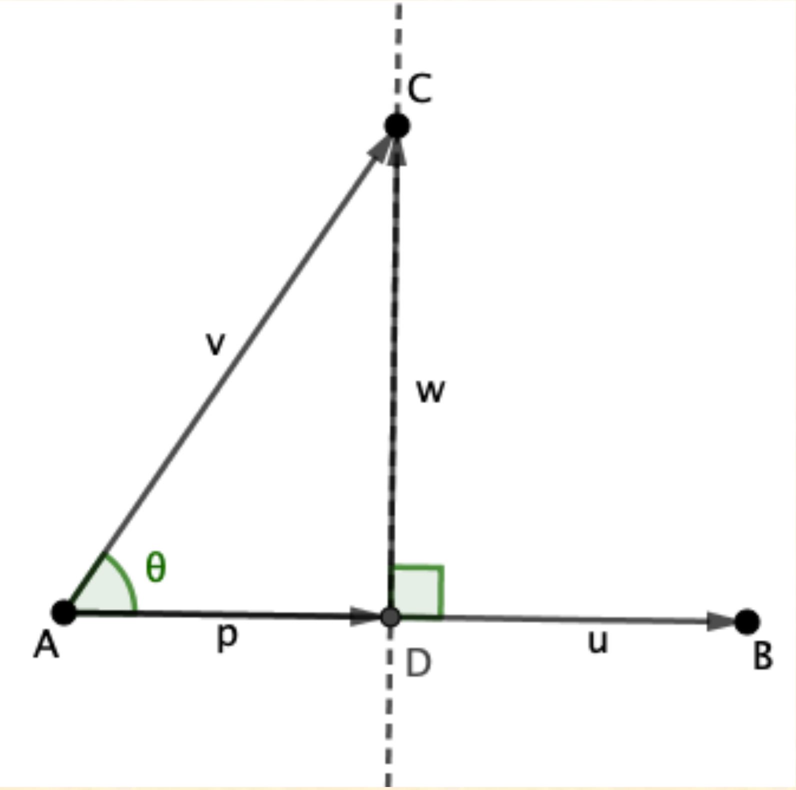
- Dados **dois vetores não nulos,** $\vec{u}$ e $\vec{v}$, queremos determinar um vetor $\vec{p}$ que é **projeção do vetor** $\vec{v}$ **sobre** $\vec{u}$.



Projeção de Vetor

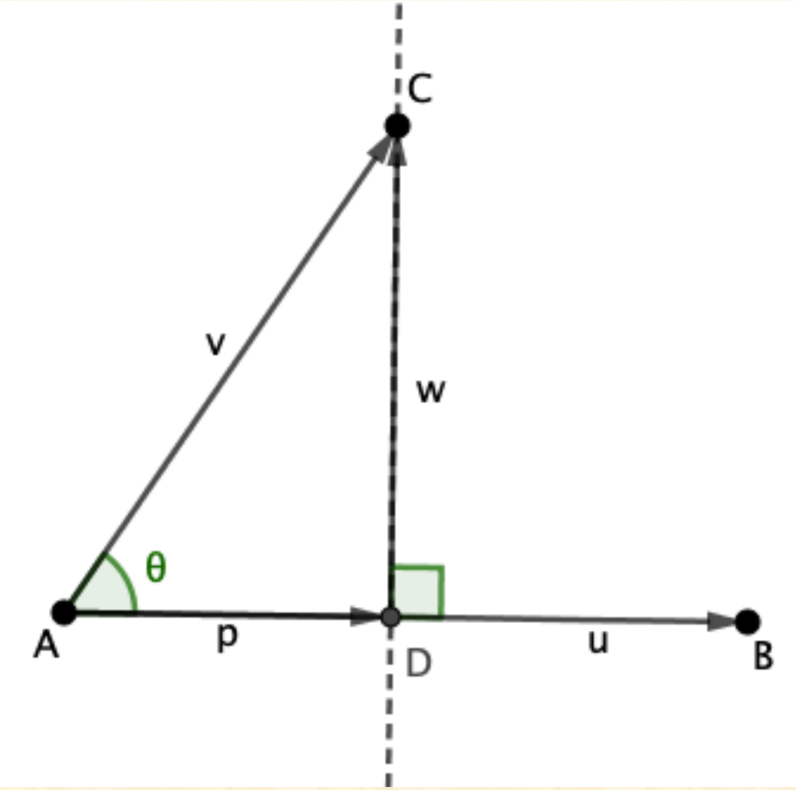


- $\vec{p}$ é múltiplo de $\vec{u} \Leftrightarrow \vec{p} = \lambda\vec{u}$ **(1)**



- Seja $\vec{w} = \vec{v} - \vec{p}$ e $\vec{w} \perp \vec{u} \Leftrightarrow$ $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{v} - \vec{p}, \vec{u} \rangle = 0$ **(2)**

Projeção de Vetor



Desenvolvendo o produto escalar de **(2)**, tem-se:

$$\langle \vec{v} - \vec{p}, \vec{u} \rangle = 0^{*}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{p}, \vec{u} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \langle \lambda\vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \lambda\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \lambda\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$$

$$\lambda = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}$$

Portanto, de (1) tem-se:

$$\boldsymbol{\vec{p}} = \left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\right)\boldsymbol{\vec{u}} = \boldsymbol{proj_{\vec{u}}\,\vec{v}}$$

* Usando propriedades do produto escalar.

Projeção de Vetor

E se os vetores forem **ortogonais**?

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ com $\vec{u} \perp \vec{v}$

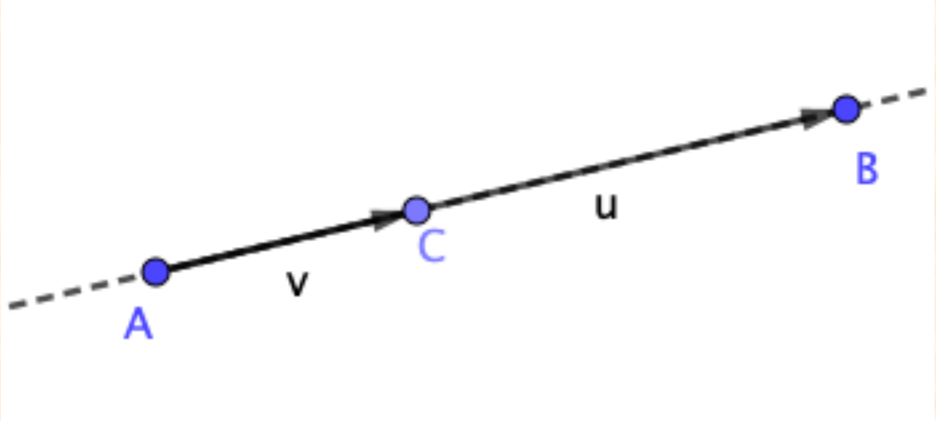
$$proj_{\vec{u}}\,\vec{v} = proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \overrightarrow{AA} = \vec{O} \ \ (vetor\, nulo)$$

O que condiz com o que foi deduzido, pois como $\vec{u} \perp \vec{v} \ \Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, tem-se que $\lambda = 0$:

$$proj_{\vec{u}}\,\vec{v} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u} = 0\,\vec{u} = \vec{O} = proj_{\vec{v}}\,\vec{u}$$

Projeção de Vetor

E se os vetores forem **colineares**?



$$proj_{\vec{u}}\overrightarrow{v} = \vec{v} \text{ e } proj_{\vec{v}}\overrightarrow{u} = \vec{u}$$

De fato:
Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$, $\exists\, k \in \mathbb{R} : \vec{v} = k\vec{u}$

$$proj_{\vec{u}}\overrightarrow{v} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, k\vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \frac{k\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \frac{k\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = k\vec{u} = \vec{v}$$

Analogamente para $proj_{\vec{v}}\overrightarrow{u} = \vec{u}$.

Projeção de Vetor sobre vetor unitário

Se $\vec{\boldsymbol{u}}$ for unitário, isto é: $\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \mathbf{1}\ (\boldsymbol{u}.\boldsymbol{c}.)$

$$proj_{\vec{u}}\,\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle\ \vec{u}$$

E, o módulo do vetor projeção é:

$$\|\boldsymbol{proj}_{\vec{u}}\,\vec{\boldsymbol{v}}\| = \left\| \left(\frac{\langle \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{u}} \rangle}{\|\vec{\boldsymbol{u}}\|^2} \right) \vec{\boldsymbol{u}} \right\| = \frac{|\langle \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{u}} \rangle|}{\|\vec{\boldsymbol{u}}\|^2}\ \|\vec{\boldsymbol{u}}\| = |\langle \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{u}} \rangle|$$

Isso significa que o **valor absoluto do produto escalar** entre dois vetores $\vec{\boldsymbol{v}}$ e $\vec{u}$ (com $\vec{u}$ unitário) representa o **módulo da projeção** de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

Projeção de Vetor sobre vetor unitário

Como já sabemos:

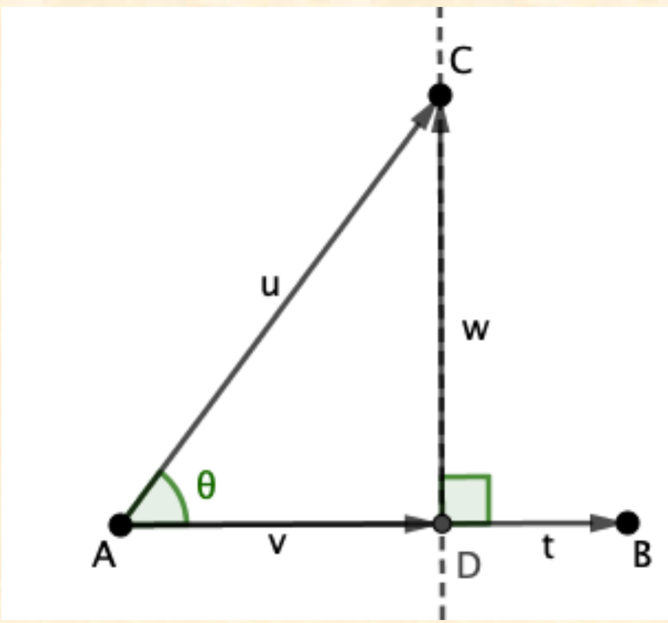
Considerando os vetores partciulares $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}$ e $\vec{\boldsymbol{k}}$, resulta:

$$proj_{\vec{i}}\,\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{i} \rangle\, \vec{i} = x\, \vec{i}$$
$$proj_{\vec{j}}\,\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{i} \rangle\, \vec{i} = x\, \vec{j}$$
$$proj_{\vec{k}}\,\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{i} \rangle\, \vec{i} = x\, \vec{k}$$

Por exemplo: Os vetores projeções do vetor $3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ sobre os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$, são $3\vec{i}, -4\vec{j}$ e $5\vec{k}$, respectivamente.

Exemplo 1

1) Decomponha o vetor $\vec{u} = -\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ como a soma de dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ com $\vec{v}$ paralelo ao vetor $\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{w}$ ortogonal a este último.



$\vec{u} = (-1, -3, 2)$ e $\vec{t} = (0, 1, 3)$

$\vec{v} = proj_{\vec{t}}\,\vec{u}$

$$\vec{v} = \left(\frac{\langle \vec{t}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{t}\|^2}\right)\vec{t} = \left(\frac{3}{10}\right)(0, 1, 3) = \left(0, \frac{3}{10}, \frac{9}{10}\right)$$

$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$

$$\vec{w} = (-1, -3, 2) - \left(0, \frac{3}{10}, \frac{9}{10}\right) = \left(-1, -\frac{33}{10}, \frac{11}{10}\right)$$

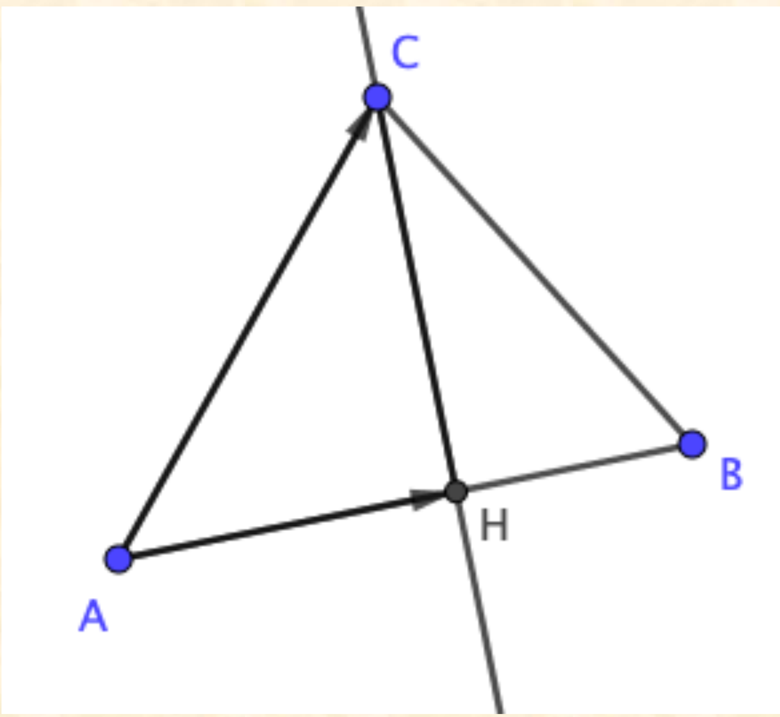
$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{w} = \left(0, \frac{3}{10}, \frac{9}{10}\right) + \left(-1, -\frac{33}{10}, \frac{11}{10}\right) = (-1, -3, 2)$$

Com $\vec{v} \parallel \vec{t}$ e $\vec{w} \perp \vec{t}$.

Exemplo 2

2) Determine a área do triângulo △ABC cujos vértices num sistema de coordenadas cartesiano são:

$$A = (-2, 2, 0);\ B = (-3,1,4);\ C = (1,3,-2)$$



Tomando $\overline{AB}$ como base, calcula-se a medida da altura $\overline{HC}$

$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,4)$; $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (u.c.)

$\overrightarrow{AC} = (3,1,-2)$

$\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle = -12$

$\overrightarrow{AH} = proj_{\overrightarrow{AB}}\, \overrightarrow{AC} = -\dfrac{12}{18}\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{8}{3}\right)$

$\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AH} = \left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

$\|\overrightarrow{HC}\| = \sqrt{6}$ (u.c.)

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} 3\sqrt{2}.\sqrt{6} = 3\sqrt{3}$ (u.a.)

Exercícios

1) Sejam os pontos *P*=(1,2,-1), *Q*=(-1,0,-1) e *R*=(2,1,2), pede-se:

a) Classificar o triângulo *PQR* (quanto aos lados ou ângulos)
b) Obter a medida da projeção do lado PQ sobre o lado QR
c) Determinar o ponto *H*, pé da altura do triângulo relativo ao vértice *A*.

2) Dados $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \vec{i} + \vec{k}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{CB}} = \vec{j} + 2\vec{k}$.

a. Mostre que o triângulo *ABC* é retângulo;
b. Obtenha o comprimento da altura relativa à hipotenusa.