UM POUCO DA HISTÓRIA DE POTÊNCIAS, EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

Iole de Freitas Druck

INTRODUÇÃO

Os logaritmos foram inventados, de maneira independente, por John Napier (1550-1617), barão escocês, teólogo e matemático, e por Jost Bürgi (1552-1632), suiço, matemático e fabricante de instrumentos astronômicos. Sem que nenhum tivesse conhecimento do outro, as tabelas de logaritmos de Napier foram publicadas em 1614 e as de Bürgi em 1620. Ambos procuravam resolver o problema de simplificar as longas operações de multiplicação e divisão que vinham exigindo os recentes desenvolvimentos da Astronomia e da Navegação, tanto envolvendo números muito grandes como frações decimais muito pequenas. Note-se que, no final do século XVI, apesar de já conhecido, o uso sistemático de casas depois da vírgula para as frações decimais não era generalizado - foi o trabalho de Napier que deu o impulso final para o emprego universal desta notação decimal para os números pequenos. Tampouco havia a notação de potências para abreviar produtos repetidos de um mesmo valor. As progressões aritméticas e geométricas eram bem conhecidas, mas não havia sido introduzida a notação b^n, sem sequer para n número natural. Mais surpreendentemente, talvez, é saber que, nesta época, ainda não havia sido identificada a idéia de função. Apesar da trigonometria estar muito desenvolvida e de identidades como a seguintes serem conhecidas, suas provas eram de natureza geométrica e eram compreendidas como fórmulas que descreviam igualdades numéricas e não como identidades funcionais:

$$2\,senA\,cosB = sen(A+B) + sen(A-B)$$
$$2\,cosA\,sen\,B = sen(A+B) - sen(A-B)$$
$$2\,cosA\,cosB = cos(A+B) + cos(A-B)$$
$$2\,senA\,senB = cos(A-B) - cos(A+B)$$

Aliás, as tabelas de senos e cossenos é que eram empregadas para transformar produtos em somas e simplificar aquele tipo de operação.

EXERCÍCIO (do livro Logaritmos de Elon Lima)

Dados dois números a e b para multiplicar, mudando seus sinais e a posição das vírgulas, podemos supor que a e b estão compreendidos entre 0 e 1. Por meio de uma tábua de funções trigonométricas (que existe desde o tempo de Ptolomeu), achamos números A, B tais que $\cos A = a$ e $\cos B = b$. Calculamos a soma $A+B$ e a diferença $A-B$. Novamente a tábua nos fornece $\cos(A+B)$ e $\cos(A-B)$. O produto $a.b$ procurado será simplesmente a metade da soma $\cos(A + B) + \cos(A-B)$.

Usando este método, calcule os produtos abaixo:

a) 0,921 x 0,758.
b) $(0{,}85771)^2$.
c) 0,873 x 0,802.

O uso dos logaritmos, no entanto, veio a simplificar mais os cálculos de produtos e quocientes, com a vantagem de ser aplicável a potências e raízes. Por exemplo, quando Kepler recebeu as tabelas de Napier de 1614, ele as utilizou com entusiasmo nos cálculos enormes que finalmente o levaram à formulação de sua terceira lei do movimento dos planetas.

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

Tudo leva a crer que a constatação de que adição de termos numa progressão aritmética corresponde à multiplicação de termos correspondentes numa progressão geométrica é que foi a inspiração inicial tanto do trabalho de Napier quanto do de Bürgi. Na ausência da notação de potência, em 1544, no livro "Arithmetica Integra", Michael Stifel já havia colocado lado a lado as referidas progressões:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	

e estabelecido as relações:
soma na 1ª corresponde a produto na 2ª;
diferença na 1ª corresponde a quociente na 2ª;
produto na 1ª corresponde a elevar a "potência" na 2ª;
quociente na 1ª corresponde a extração de raiz na 2ª;

Assim por exemplo, para saber o resultado de 16 x 64, basta ver que

16 na 2ª linha corresponde a 4 na 1ª;
64 na 2ª linha corresponde a 6 na 1ª;
que 4 + 6 = 10 e que
10 na 1ª linha corresponde a 1024 na 2ª.
Portanto, 16 x 24 = 1024.

Ou, para saber o valor de $\sqrt[2]{1024}$, olhando para a 1ª linha, faz-se 10 ÷ 2 = 5 e, voltando para a 2ª linha, obtem-se $\sqrt{1024} = 32$.

Evidentemente não eram estes cálculos, com números tão simples, que necessitavam astrônomos e navegantes. Mas aí estava o germe da idéia.

O passo dado por ambos os inventores do logaritmo parece ter sido a percepção de que, para poder utilizar com proveito a relação entre progressões aritméticas e geométricas, a razão desta última deveria ser um número muito próximo da unidade, de maneira a que o intervalo entre dois termos sucessivos da PG fosse pequeno e os cálculos pudessem ser realizados com boas aproximações.

Napier utilizou, como razão, um número um pouco menor do que $1 : 0{,}9999999$ $(=1-10^{-7})$ enquanto que Bürgi empregava uma razão algo maior do que $1 : 1{,}0001$ $(=1+10^{-4})$. Ambos colocaram como termo inicial das suas progressões geométricas números grandes, deixando a impressão de que, de fato, eram os produtos de grandes números ou de números com muitos digitos que mais estavam interessando. De qualquer maneira, já era conhecida a possibilidade de mudar a posição das vírgulas multiplicando ou dividindo por potências de 10. Em notação moderna, a primeira tabela de Napier era formada pelos primeiros 100 termos da progressão geométrica, cujo termo geral é:

$$a_n = 10^7 (1-10^{-7})^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, 100)$$

enquanto que a tabela de Bürgi descrevia os termos da progressão geométrica cujo termo geral é:

$$b_n = 10^8 (1+10^{-4})^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, 23.027)$$

que ia até 23.027 números pois $(1+10^{-4})^{23.027} \approx 10$.

Napier parece ter ficado muito entusiasmado com seu trabalho, ao qual deu o nome de "Mirifici logarithmorum canonis descriptio" - Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos. (Logaritmo, palavra inventada por Napier juntando "logos" e "arithmos" - número de razão, em substituição à sua primeira nomenclatura - número artificial.)

Já Bürgi chamou seu livro sobre o assunto de "Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen", numa citação objetiva do conteúdo das tabelas.

Fica claro que as primeiras tabelas de logaritmos não apareceram como tabelas de "expoentes a que se deve elevar uma base para obter o número dado". Muito menos foram utilizadas inicialmente quer seja a base 10 ou a base e (chamada de Neperiana, numa homenagem a Napier). Observemos que, pela definição original de Napier (mas em linguagem atual), diremos que $n = Nlog(a_n)$ se $a_n = 10^7(1-10^{-7})^n$. Como a razão desta progressão geométrica é menor do que 1, n cresce se e só se a_n decresce e, portanto, $Nlog$ é uma função decrescente, ao contrário do log_{10} e do log_e. Mais ainda, nem mesmo a propriedade usual $log(a.b) = loga + logb$ vale para $Nlog$. Como

$$a_n . a_m = 10^7(1-10^{-7})^n . 10^7(1-10^{-7})^m = 10^7[10^7(1-10^{-7})^{m+n}] = 10^7 a_{m+n}$$

temos que

$$Nlog\left(\frac{a_n . a_m}{10^7}\right) = Nlog(a_{m+n}) = n+m$$

ou seja, a propriedade que vale é:

$$Nlog\left(\frac{a.b}{10^7}\right) = Nloga + Nlogb$$

Note-se que, ao dividirmos um número por 10^7 o único resultado prático é o deslocamento para a esquerda na posição da virgula e, portanto, fica ainda fácil o emprego do $Nlog$ para cálculo de produtos, desde que se tome o devido cuidado com a posição da virgula.

Em 1615, procurado e provocado pelo professor de geometria de Oxford, Henry Briggs, o próprio Napier concluiu que uma tabela na qual o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse 1 seria mais fácil de utilizar. Com a doença de Napier, coube a Briggs desenvolver esta idéia. Em 1617, morre Napier e Briggs publica a primeira tabela de logaritmos de base 10, com os logaritmos de 1 a 1000 escritos com 14 casas decimais. Em 1624, Briggs publicou "Arithmetica logarithmica", com os logaritmos decimais de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. Já neste livro aparecem as palavras "caracteristica" e "mantissa". Esta tabela funcionava exatamente como as de hoje em dia, já que aqueles logaritmos verificam todas as propriedades usuais dos logaritmos.

EXERCÍCIO: Estabelecer as propriedades relativas ao cálculo do *Nlog* de $\frac{a}{b}$, de a^n e de $\sqrt[n]{a}$.

Passemos à descrição de como Napier e Briggs montaram suas tabelas.

A PRIMEIRA TABELA DE NAPIER

Nela apareciam 100 números, obtidos por 100 subtrações:

10.000.000,000.000.0	0
- 1,000.000.0	
9.999.999,000.000.0	1
- 0,999.999.9	
9.999.998,000.000.1	2
- 0,999.000.8	
9.999.997.000.000.3	3
- 0,999.999.7	
9.999.996,000.000.6	4
⋮	
9.999.900,000.495.0	100

Napier concluiu que, para obter o próximo termo (a_{n+1}) da sua progressão geométrica, bastava subtrair do anterior (a_n) o seu próprio valor multiplicado por 10^{-7} ou seja $10^{-7}a_n$. Assim, bastava deslocar a vírgula, no último termo a_n calculado, 7 casas para a esquerda e subtrair este valor de a para obter o próximo a_{n+1}. Não sei qual o raciocínio utilizado por Napier para chegar a esta conclusão, mas podemos provar este fato facilmente com nossa notação moderna:

$$a_n = 10^7 (1-10^{-7})^n$$

e

$$a_{n+1} = 10^7 (1-10^{-7})^{n+1} = 10^7 (1-10^{-7})^n (1-10^{-7}) =$$

$$10^7 (1-10^{-7})^n - 10^7 (1-10^{-7})^n \, 10^{-7} = a_n - a_n \, 10^{-7}$$

Observe que propriedade análoga, trocando subtração por adição, vale também para a progressão geométrica de Bürgi, que deve tê-la empregado na construção da sua tabela.

$$b_n = 10^8 (1+10^{-4})^n$$

$$b_{n+1} = 10^8 (1+10^{-4})^{n+1} = 10^8 (1+10^{-4})^n (1+10^{-4}) =$$

$$10^8 (1+10^{-4})^n + 10^8 (1+10^{-4})^n\, 10^{-4} = b_n + b_n\, 10^{-4}$$

Conforme já observamos antes, não se pode usar diretamente estas tabelas. Por exemplo, como $N\log$ 9.999.998,000.000.1 é 2 não podemos concluir que $(9.999.998{,}000.000.1)^2$ é o número cujo N logaritmo seja $4 = 2 \times 2$, mas sim 10^7 vezes este número (POR QUE?), ou seja, (9.999.998,000.000.1)2 = 10^7 x 9.999.996,000.000.6.

Nesta tabela inicial de Napier, o objetivo de produzir uma progressão geométrica tal que os "buracos" entre os termos não fossem muito grandes é atingido somente de forma razoável. Foram necessários 100 logaritmos para cobrir um intervalo numérico de aproximadamente 100 unidades, deixando fora da tabela números intermediários, como por exemplo 9.999.999,5. Napier fez duas outras tabelas. As três juntas davam conta, com precisão até a sétima casa decimal, da possibilidade de usar os logaritmos dos números de 4.998.609,403.4 a 10.000.000,000.0 por uma regra de interpolação descrita na 3ª tabela. Napier trabalhou 20 anos para produzir este trabalho, que só foi inteiramente publicado em 1619, depois de sua morte.

EXERCÍCIO - Utilizando as idéias acima, construa a progressão geométrica de termo geral $c_n = (1+10^{-3})^n$ até o termo c_{10} e calcule um valor aproximado de 1004006 x 1006015 utilizando esta tabela.

Invente uma divisão, uma potência e uma raiz cúbica que possam ser encontradas (aproximadamente) com o uso destas tabelas.

OS LOGARITMOS DECIMAIS DE BRIGGS

Como vimos, a idéia de Briggs era a de aperfeiçoar os logaritmos de Napier de maneira a obter as propriedades: $log1 = 0$, $log10 = 1$, $logab = loga + logb$ e tal que $a < b$ se e só se $loga < logb$. Briggs (1556-1630), que era professor de matemática em Oxford, tinha uma capacidade algébrica e aritmética altamente desenvolvida e certamente percebeu que estes logaritmos, para um número a, seriam o "expoente" (em termos atuais) ao qual se deve elevar 10 para obter o número a. Também percebeu que, para todo $n \in Z$, $log10^n a = n + loga$ e que, portanto, bastaria determinar os logaritmos para os números entre 1 e 10 (com logaritmos entre 0 e 1) pois para qualquer outro número b (real) se pode encontrar $n \in Z$ e a entre 1 e 10 tal que $b=10^n a$ (n é o "nº de deslocamentos da vírgula para obter a", positivo se o deslocamento é para a direita, negativo se o deslocamento é para a esquerda).

Assim, por exemplo, se $log\ 2 = 0{,}30103$, então

$$log\ 20 = 1{,}30103 \text{ e}$$
$$log\ 200 = 2{,}30103$$
$$log\ 0{,}2 = \bar{1}{,}30103 = -1+0{,}3010 = -0{,}69897$$

Se é levado a inferir que Briggs dominava todos estes conhecimentos sobre as propriedades das "potências" pelo fato de que sua primeira tabela era uma tabela das 54 primeiras raízes quadradas sucessivas de 10. Ou seja, Briggs calculou, com até 32 casas decimais, $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\sqrt{10}} = 10^{\frac{1}{4}}$, $10^{\frac{1}{8}} = 10^{\frac{1}{2^3}}$,..., $10^{\frac{1}{2^{54}}}$, e observou que $log\ 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, ..., $\log 10^{\frac{1}{2^{54}}} = \frac{1}{2^{54}}$, como mostra a tabela abaixo. Lembremos, ele pensou tudo isso sem o auxílio da notação de potência, que não havia ainda sido introduzida.

EXTRATO DO 1o. SISTEMA DE LOGARITMOS DE BRIGGS

RETIRADO DO LIVRO DE H. H. GOLDSTINE "A HISTORY OF NUMERAL ANALYSIS FROM THE 16th CENTURY"

1o Systéme logarithmique de Briggs (Extrait)

	Nombres	Logarithmes
0	10,0.000 00	1
1	3,1622.77660.16387.93319.98893.54	0,5
2	1,7788.79410.03892.28011.97304 13	0,25
3	1,3335.21432.16322.40256.65389.308	0,125
4	1,1547.81984.68945.81796.61918.213	0,0625
16	1,0000 35135 27746.18566.08581.37077	0,00001.52587 89062 5
17	1,0000.17567.48442.26738.33846.78274	0,00000 76293 94531 25
18	1,0000 08783.70363.46121 46574 07431	0,00000.38146 97265 625
47	1,0000 00000.00001.63608.51112.96427.283	"
48	1,0000.00000.00000.81804.25556.48210.295	"
49	1,0000 00000.00000.40902.12778.24104.311	"
52	1,0000 00000 00000.05112.76597.28102.947	0,00000.00000 00002 2204 46059 25031
52	1,0000.00000.00000.02556.38298.64006 470	0,00000 00000 00001 1102 23024 62515
54	1,0000.00000 00000.01278.19149.32003.235	0,00000 00000 00000 05561 11512 31257
	1,0000 00000.00000.01	0,00000 00000 00000 04342 94491 90325 1804

A partir desta tabela. Briggs montou sua tabela de logaritmos dos números de 0 a 100 (bastava de 1 a 10, como vimos) utilizando as propriedades dos logaritmos:

$\log(a.b) = \log a + \log b$ $\qquad$ $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

$\log(a^r) = r\log a$ $\qquad$ $\log(10^n a) = n + \log a$

Resta, ainda, a observação de que Briggs parou na 54ª extração de raiz por constatar que $10^{\frac{1}{2^{54}}} = 1 + 10^{-16}$, ou seja, igual a 1 até 15 casas decimais (lembremos que ele estava interessado em 14 casas decimais exatas).

Veja um exemplo de como, usando a tabela inicial de Briggs e as propriedades do logaritmo, por um processo de aproximações sucessivas, se pode encontrar o logaritmo de 1,5 com precisão de até 4 casas decimais depois da vírgula.

Observando na tabela, 1,5 é um número intermediário entre os que aparecem nas linhas 2 e 3:

$$1,333.521.4... < 1,5 < 1,778.279.4... \qquad (1)$$

Portanto o seu logaritmo também está entre os logaritmos das linha 2 e 3:

$$\frac{1}{8} = 0,125 < \log 1,5 < 0,25 = \frac{1}{4} \qquad (A)$$

Lembremos que isto significa, sendo $x = \log 1,5$ que $10^{\frac{1}{8}} < 10^{x} < 10^{\frac{1}{4}}$.

Como 1,5 está entre 1,7 e 1,3, tentemos achar um expoente r_1 para 10 que seja maior do que $\frac{1}{8}$ e menor do que $\frac{1}{4}$ para nos aproximarmos mais de x tal que $10^{x} = 1,5$. Tomemos a média aritmética entre $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{4}$: $r_1 = \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2} = \left(\frac{1+2}{8}\right)\frac{1}{2} = \frac{3}{8}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{16}$. Assim $\frac{1}{8} < \frac{3}{16} < \frac{1}{4}$.

Para calcular $10^{\frac{3}{16}} = (10^{\frac{1}{16}})^3$ podemos olhar o valor de $10^{\frac{1}{16}}$, na linha 4 da tabela, e depois elevá-lo ao cubo. Usando uma calculadora obtemos:

$$(10^{\frac{1}{16}})^3 \approx (1,1547819)^3 \approx 1,5399261$$

(com aproximação de 7 casas decimais porque é o que a calculadora me permite).

Logo, podemos escrever uma segunda aproximação para o log1,5:

Como $10^{\frac{1}{8}} \approx 1,333.521.4 < 1,5 < 1,5399261 \approx 10^{\frac{3}{16}}$ (2)

teremos que $\frac{1}{8} = 0,125 < \log 1,5 < \frac{3}{16} = 0,1875$ (B)

Continuemos o procedimento, tentando a média aritmética entre $\frac{1}{8}$ e $\frac{3}{16}$, ou seja $r_2 = \left(\frac{1}{8}+\frac{3}{16}\right)\frac{1}{2} = \frac{5}{32}$.

<u>Observe que fazer a média aritmética entre os expoentes, corresponde a procurar a média geométrica entre as potências, pois</u> $10^{\frac{5}{32}} = 10^{\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{16}\right)\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{10^{\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{16}\right)}} = \sqrt{10^{\frac{1}{8}}.10^{\frac{3}{16}}}$.

Como a linha 5 da tabela de Briggs não aparece no extrato que tivemos acesso, teremos de novamente utilizar a calculadora para encontrar o valor de $10^{\frac{1}{32}} = 10^{\frac{1}{2^5}}$ correspondente à 5a. extração de raiz quadrada sucessiva. Depois, como $10^{\frac{5}{32}} = \left(10^{\frac{1}{32}}\right)^5$, usaremos a calculadora para encontrar a 5ª potência deste número.

Pela tabela $10^{\frac{1}{16}} \approx 1{,}1547819$ o que nos dá $\sqrt{10^{\frac{1}{16}}} = 10^{\frac{1}{32}} \approx 1{,}0746077$ e $\left(10^{\frac{1}{32}}\right)^5 \approx 1{,}4330116$.

Obtivemos assim a 3ª aproximação:

$$10^{\frac{5}{32}} \approx 1{,}4330116 < 1{,}5 < 1{,}5399261 \approx 10^{\frac{3}{16}} \qquad (3)$$

o que nos dá, para o logaritmo:

$$\frac{5}{32} = 0{,}15625 < \log 1{,}5 < 0{,}1875 = \frac{3}{16}$$

Continuando o procedimento, com a máquina de calcular, obtemos:

$$r_1 = \left(\frac{5}{32}+\frac{3}{16}\right)\frac{1}{2} = \frac{5+6}{64} = \frac{11}{64}$$

$$10^{\frac{11}{64}} = \left(10^{\frac{1}{64}}\right)^{11} = \left(\sqrt{10^{\frac{1}{32}}}\right)^{11} \approx \left(\sqrt{1{,}0746077}\right)^{11}$$

$$\text{Mas} \quad \sqrt{1{,}746077} \approx 1{,}0366328 \approx 10^{\frac{1}{64}}$$

$$\text{e} \quad (1{,}0366328)^{11} \approx 1{,}4855052 \approx 10^{\frac{11}{64}}$$

o que nos deu uma aproximação melhor pela esquerda:

$$10^{\frac{11}{64}} \approx 1{,}4855052 < 1{,}5 < 1{,}539921 \approx 10^{\frac{1}{16}} \qquad (4)$$

e portanto

$$\frac{11}{64} = 0{,}171875 < \log 1{,}5 < 0{,}1875 = \frac{3}{16} \qquad (D)$$

Continuemos o processo até estabilizar a 2ª casa decimal, já que, desde a desigualdade (B) podemos observar que a primeira casa decimal de log 1,5 é 1, ou seja, $\log 1{,}5 \approx 0{,}1$.

A próxima média aritmética será entre $\frac{11}{64}$ e $\frac{3}{16}$:

$$r_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{64} + \frac{3}{16}\right) = \frac{11+12}{128} = \frac{23}{128} = 0{,}1796875$$

$$10^{\frac{23}{128}} = \left(10^{\frac{1}{128}}\right)^{23} = \left(\sqrt{10^{\frac{1}{64}}}\right)^{23} \approx \left(\sqrt{1{,}0366328}\right)^{23}$$

Mas $\sqrt{1{,}0366328} \approx 1{,}0181516 \approx 10^{\frac{1}{128}}$ e $\left(\sqrt{1{,}0366328}\right)^{23} \approx 1{,}5124695 \approx 10^{\frac{23}{128}}$

E, a menos que eu tenha me enganado ao apertar alguma tecla da calculadora, obtivemos a 5ª aproximação:

$$10^{\frac{11}{64}} \approx 1{,}4855052 < 1{,}5 < 1{,}5124695 \approx 10^{\frac{23}{128}} \qquad (5)$$

o que nos dá

$$\frac{11}{64} = 0{,}171875 < \log 1{,}5 < 0{,}1796875 = \frac{23}{128} \qquad (E)$$

E nesta etapa conseguimos uma aproximação para o log 1,5 com exatidão até a 2ª casa decimal:

$$\log 1{,}5 \approx 0{,}17$$

mas bastante imprecisa a partir da 3ª casa, já que o algarismo correto desta casa pode estar entre 1 e 9!

EXERCÍCIOS:

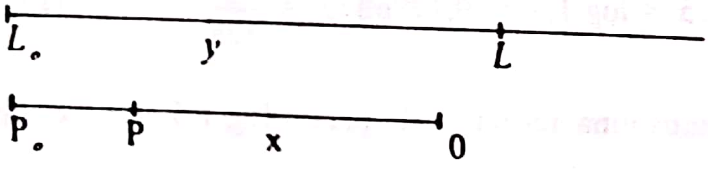
1. Continue este processo até conseguir exatidão nas 3ª e 4ª casas decimais para o log 1,5, utilizando a calculadora eletrônica.

2. Achar, com 4 casas decimais precisas, o $\log_{10} 5$, utilizando as idéias acima e uma calculadora eletrônica.

Talvez tenha ficado claro [redacted] o quanto as tabelas ajudaram a simplificar os cálculos no início do século XVII, já que naquela época não havia máquina de calcular, mas os problemas de astrônomos e navegadores envolviam certamente números com muitos dígitos. Também é de se tirar o chapéu à engenhosidade, paciência e pertinácia destes homens que passaram anos de suas vidas fazendo uma série de cálculos, para que a humanidade pudesse, depois, fazer os seus cálculos mais rápida e facilmente. Certamente também o desenvolvimento do comércio se beneficiou muito com o trabalho deles, bem como a ciência em geral. Suas tabelas representaram, para os séculos XVII, XVIII e XIX, o que os computadores representam para o século XX, em matéria de cálculos numéricos.

A "FUNÇÃO LOGARITMO" DE NAPIER

Não dispondo do conceito de "função de variável real", mas tendo a necessidade de poder atribuir um logaritmo para qualquer número, mesmo àqueles situados entre dois números consecutivos de sua tabela, Napier deu uma definição de logaritmo baseada no movimento contínuo de pontos ao longo de retas. Ele considerou uma semi-reta, de origem L_o (para domínio dos logaritmos) e um segmento de reta $\overline{P_oO}$, de comprimento 10^7 (para domínio dos números aos quais se vai atribuir um logaritmo):

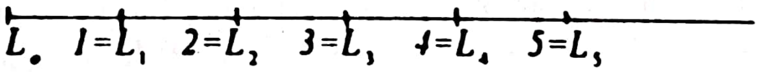


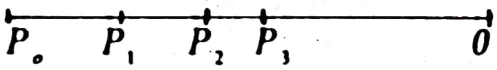
Se Napier falasse uma linguagem mais próxima da que empregamos hoje, ele poderia ter formulado sua definição como segue (numa tradução livre minha da definição de Napier):

- Considerando que o ponto L se move na semi-reta $\overrightarrow{L_0L}$ a partir de L_0 e com velocidade constante igual a 10^7; considerando que o ponto P se move no segmento $\overline{P_0P}$, a partir de P_0, com velocidade decrescente e com valor, em cada instante, igual à distância que falta percorrer até 0; sendo y a medida do segmento $\overline{L_0L}$ e x a medida do segmento $\overline{PO}$, para L e P fixados no mesmo instante de tempo, então chamamos <u>y de logaritmo de x</u>.

Vejamos como esta "definição contínua" ou "cinemática" extende a inicial, dada somente para a seqüência $a_n = 10^7(1-10^{-7})^n$ de números, que dizia ser n o logaritmo de a_n.

Na definição acima, a semi-reta $\overrightarrow{L_0L}$ está no lugar da progressão aritmética 0, 1, 2, 3, ... e o segmento $\overline{P_0P}$ está no lugar da progressão geométrica $a_n = 10^7(1-10^{-7})^n$ $(n \in N)$. Se a velocidade é constante e igual 10^7 sobre $\overrightarrow{L_0L}$ então, para percorrer uma distância equivalente a uma unidade, é necessário um tempo $t = 10^{-7}$ (unidades de tempo). Considerando ser este um tempo pequeno (se a unidade for minuto, por exemplo), neste intervalo de tempo o ponto P vai de P_0 a P_1 com uma velocidade decrescente mas ainda muito próximo de 10^7. Assim $\overline{P_0P_1} \approx 1$ e $x_1 = \overline{P_10} \approx 10^7 - 1 = 10^7(1-10^{-7})$.





Durante o segundo intervalo de tempo de duração 10^{-7}, L percorre mais uma unidade de comprimento. Já P se move com uma velocidade de valor aproximado $10^7(1-10^{-7})$ neste intervalo, já que este é o valor aproximado da velocidade de P_1 e o intervalo de tempo é pequeno. Assim:

$$\overline{P_1P_2} \approx 10^7(1-10^{-7})10^{-7} = (1-10^{-7}) \quad \text{e}$$

$$x_2 = \overline{P_20} = \overline{P_10} - \overline{P_1P_2} \approx 10^7(1-10^{-7}) - (1-10^{-7}) = (10^7-1)(1-10^{-7}) =$$
$$10^7(1-10^{-7})(1-10^{-7}) = 10^7(1-10^{-7})^2$$

Continuando este raciocínio, encontramos que

$$x^n = \overline{P_n0} \approx 10^7(1-10^{-7})^n.$$

Pode-se observar que esta definição extende a outra somente por aproximação. Napier garantia, em todo caso, que suas tabelas, feitas a partir da 1ª definição, davam uma precisão, nas respostas, até 7ª casa decimal. Na verdade, por um erro de cálculo por ele cometido, suas tabelas dão aproximações boas até a 6ª casa decimal.

Essa idéia da 2ª definição foi extremamente importante e está na origem da descoberta do número e e da função exponencial de base e. Problemas como o de prever o tempo de resfriamento de um corpo, o tempo de desintegração radioativa do urânio (que permite estimar a época de materiais fósseis) ou o valor da pressão atmosférica para cada altura h (que é importante para a aviação), são problemas cuja análise recai no modelo de movimento descrito na 2ª definição de logaritmo de Napier.

<u>EXERCÍCIO</u>: Dado que

- A lei de resfriamento de Newton afirma que a diferença de temperatura D, entre o objeto e o meio mais frio que o contém, decresce com um taxa de variação proporcional a essa própria diferença.

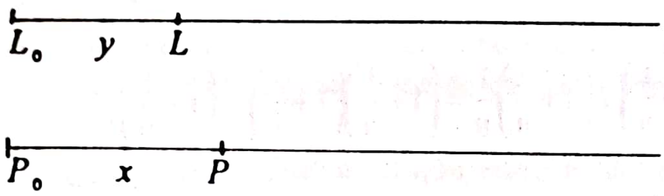
- Os átomos de urânio possuem uma tendência natural a se desintegrarem. Assim, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui de tal maneira que, num dado instante, a quantidade de matéria que se desintegra é proporcional à massa de urânio que ainda resta no corpo naquele instante. A constante de proporcionalidade é determinada experimentalmente.

- A pressão atmosférica diminui à medida que aumenta a altura h em relação ao nível do mar. Diz a Lei de Boyle que o decréscimo da pressão se dá com uma taxa de variação proporcional à altura h considerada.

<u>Pergunta-se</u>: Qual a relação entre a 2ª definição de Napier e os três problemas acima?

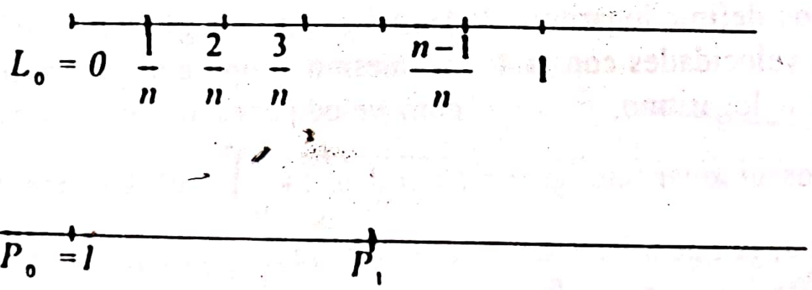
DO LOGARITMO DE BÜRGI AO LOGARITMO NATURAL (UM POUCO DE FICÇÃO HISTÓRICA)

Uma transposição das idéias da 2ª definição de Napier para as idéias envolvidas no logaritmo de Bürgi, e que não foi registrada no século XVII, nos levaria a duas semi-retas:



onde o ponto L continua movendo-se com velocidade constante v_0 descrevendo o segmento $y = \overline{L_0L}$, mas o ponto P move-se com velocidade crescentes e iguais à distância percorrida $\overline{P_0P} = x$

Já que Bürgi não fez, elaborando (a partir de uma sugestão da professora Elza Gomide, do IME-USP) de um ponto de vista atual as idéias por ele trabalhadas, normalizemos a velocidade inicial para $v_0 = 1$ no lugar dos 10^8 de Bürgi. Portanto, como estamos querendo que o ponto P se mova com velocidades iguais às distâncias percorridas e que examinaremos as posições de L e P nos mesmos instantes t de tempo; com a velocidade de L no instante inicial t_0 deve ser igual à velocidade de P em t_0, devemos admitir que em P_0, o ponto P já percorreu uma distância $x_0 = v_0 = 1$. Ou seja, P começou seu movimento num ponto anterior a P_0, digamos numa origem 0. Vejamos o que ocorre no intervalo de tempo de valor 1:



Subdividindo a unidade de tempo em n partes iguais a $\frac{1}{n}$, teremos que L estará no ponto $\frac{1}{n}$ transcorrido um tempo de $\frac{1}{n}$. Para P, supondo que este intervalo de tempo seja pequeno, (n grande) aproximamos sua posição, após o transcurso de um tempo de $\frac{1}{n}$, admitindo sua velocidade constante igual a 1 durante este tempo $\frac{1}{n}$. Portanto $P\left(\frac{1}{n}\right) \approx 1+\frac{1}{n}$.

No segundo intervalo de tamanho $\frac{1}{n}$, L chegará em $\frac{2}{n}$. Já P, considerando que neste intervalo, sua velocidade será aproximadamente igual a $P\left(\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{1}{n}$, teremos:

$$P\left(\frac{2}{n}\right) \approx P\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}P\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

Assim por diante, supondo então as velocidades de P constantes (por aproximação) em cada pequeno intervalo de tamanho $\frac{1}{n}$, mas crescendo em cada um deles conforme o prescrito, ou seja, igual à distância $\overline{OP}$, chegaremos a

$$P\left(\frac{n}{n}\right) = P(1) \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx e.$$

__EXERCÍCIO__: Calcule $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para $n = 2,4,8,16,32,64,128$ e encontre assim aproximações para e.

Colocando em ordem as idéias desenvolvidas aqui, obtemos a seguinte conclusão.

Se queremos definir logaritmo de maneira a que $log 1 = 0$, e tal que o logaritmo cresça com velocidades constantes ao mesmo tempo em que os números, dos quais se procura o logaritmo, crescem com velocidades iguais a si próprios, então o número que possui logaritmo igual a 1 é o $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$! Ou seja, teremos um logaritmo de base e, já que a base do logaritmo é que se caracteriza por possuir logaritmo igual a 1. Este é o chamado *ln* - logaritmo natural ou Neperiano.

Assim como no caso anterior, existem vários problemas importantes relacionados com as idéias desenvolvidas neste parágrafo.

EXERCÍCIO: Observe as situações descritas abaixo:

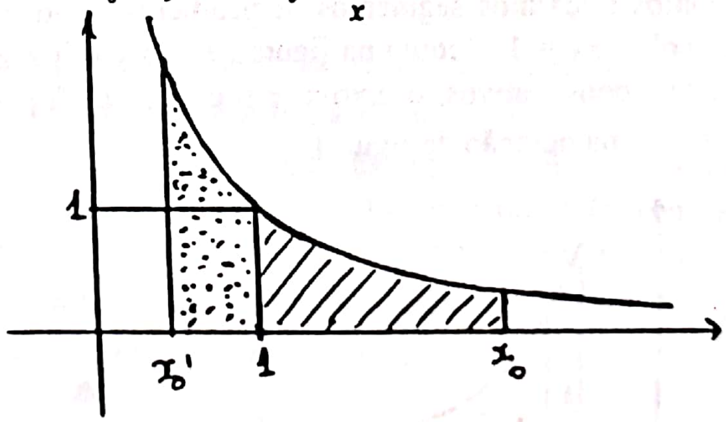
- Cálculo de juros compostos. Um capital posto para render juros (diariamente, por exemplo) aumenta, a cada instante (dia) uma quantidade de juros proporcional ao seu próprio valor no instante (dia), já acrescido dos juros anteriores. Se o rendimento fosse instantâneo (e não diário), cairíamos num caso análogo ao descrito antes - chamado "juros contínuos".

- Uma cultura de bactérias cresce, a cada instante, numa velocidade diretamente proporcional à quantidade de bactérias presentes na cultura.

- Pergunta-se: Qual a relação entre a "definição de logaritmo natural" dada neste parágrafo e os dois problemas acima?

O LOGARITMO COMO ÁREA

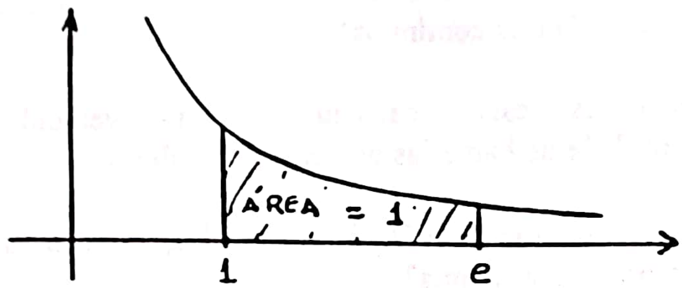
Uma maneira de definir o valor de $\ln_x$, encontrada freqüentemente em livros de cálculo, é através da área sob o gráfico do ramo da hipérbole $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$. Neste contexto diz-se que o valor de $\ln x_0$, para $x_0 \geq 1$, é o número que expressa a medida da área da região hachureada no desenho, ou seja, delimitada pelas retas $x = 1$, $x = x_0$, $y = 0$ e $y = \dfrac{1}{x}$.



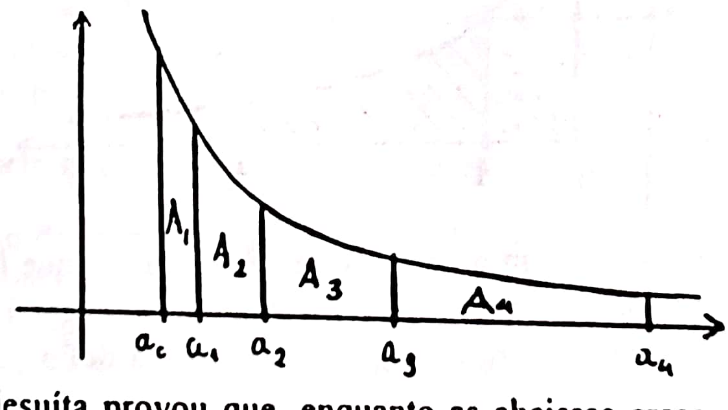
No caso de x'_0 ser um número entre 0 e 1, diz-se que $\ln x'_0$ é o número negativo cujo valor absoluto coincide com a medida da área descrita acima (com x'_0 no lugar de x_0). Na linguagem das integrais definidas, a definição pode ser dadas sinteticamente por:

$$\ln x_0 = \int_1^{x_0} \frac{1}{x}\,dx.$$

Esta abordagem possibilita um tratamento rigoroso para o logaritmo baseado no conceito de área que é mais elementar ou intuitivo, do que o de função exponencial. E uma vez definido rigorosamente, o logaritmo se define a função exponencial como sendo a inversa do ln x. Ainda mais, podemos neste contexto obter uma definição geométrica para o número *e* como sendo o valor da abcissa para a qual a referida área vale exatamente 1 (unidade de área):



Localizemos historicamente o surgimento e o desenvolvimento destas idéias. Como vimos antes, a idéia de logaritmo surgiu da associação entre progressões aritméticas e geométricas e no início do século XVII (cf. pgs. 2 e 3 do artigo) com o trabalho de Napier publicado em 1614 e o de Bürgi em 1620. O primeiro registro a tratar de áreas sob o gráfico do ramo positivo da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ data de 1647 no livro "Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni" de Gregory de St. Vicent, jesuíta belga que foi professor em Roma, Praga e Madrid. Nesta obra St. Vicent observa e prova que, se marcarmos no eixo das abcissas uma seqüência de pontos $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ formando uma progressão geométrica e se, por esses pontos traçarmos segmentos perpendiculares ao eixo x entre esse e o gráfico da hipérbole $xy = 1$ (como na figura), então são iguais às áreas entre dois segmentos verticais consecutivos, o eixo-x e o gráfico da hipérbole. ($A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_n = \ldots$, na notação da figura).



Ou seja, o jesuíta provou que, enquanto as abcissas crescem (ou decrescem, se a razão for um número entre 0 e 1) segundo uma PG $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, as áreas b_n entre o gráfico da hipérbole, o eixo-x e as retas $x = a_0$ e $x = a_n$ ($n = 0,1,2,\ldots$) ($b_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$) crescem segundo uma PA (de razão $r = A_1$).

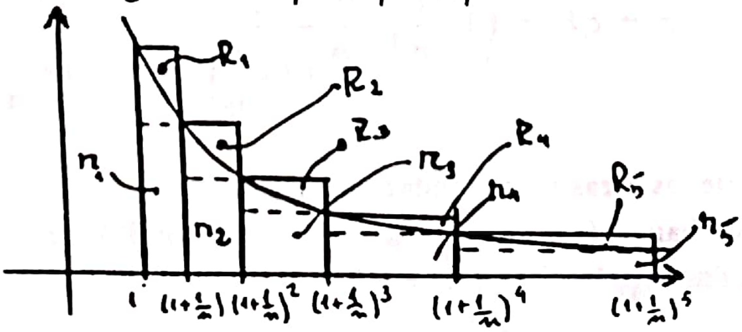
Não me perguntem como, mas o objetivo principal do "Opus Geometricum" era o de comprovar a existência de Deus. Não ocorreu ao seu autor usar a correspondência entre abcissas (PG: a_n) e áreas (PA: b_n) para definir um novo logaritmo. Isso foi feito por um amigo seu, o também jesuita belga Alfons Anton de Sarasa que, em 1649 estabeleceu a ligação entre o resultado obtido por St. Vicent e as idéias de Napier sobre logaritmo. Ele também provou que as áreas sob o gráfico da hipérbole satisfazem as propriedades características do logaritmo. Um desenvolvimento atual destes resultados, muito bem feito, pode ser encontrado no livro **"Logaritmos"** de Élon Lages Lima (publicação IMPA-Fundação Vitae). Recomendo fortemente a leitura desta obra para o leitor não familiarizado com a abordagem do logaritmo como área.

Abandonaremos uma vez mais o transcurso linear da história para uma digressão em notação moderna. Estudaremos um caso particular das áreas descritas anteriormente de forma a podermos comprovar (não provar) ou aceitar melhor a veracidade dos fatos estabelecidos pelos dois jesuítas na metade do século XVII. O que faremos, esperamos, servirá também como mais uma motivação para o emprego do adjetivo "natural", tão freqüentemente associado ao número e.

Consideremos, no eixo das abcissas, a seguinte seqüência, onde n é um número natural fixado inicialmente:

$$a_0 = 1\ ,\ a_1 = 1+\frac{1}{n}\ ,\ a_2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2\ ,\ a_3 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3\ , \ldots,\ a_k = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k\ , \ldots$$

Observe que essa é uma PG cujo 1º termo é o número $a_0 = 1$ e de razão $q = 1+1/n$. Queremos calcular o valor das áreas $b_k = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$ na notação anterior para esta particular PG. Faremos isso calculando valores aproximados, através do auxílio de retângulos escalonados, que nos fornecem aproximações por valores maiores, no caso dos R_i , e por valores maiores, no caso r_i das áreas A_i , como no desenho. Observe na figura que, para todo $i = 1, 2, 3, \ldots$ as áreas A_i procuradas obedecem à desigualdade $r_i < A_i < R_i$.



Lembremos que a PA de St. Vicent, determinada pela PG fixada será:

$$b_0 = 0,\ b_1 = A_1,\ b_2 = A_1 + A_2,\ b_3 = A_1 + A_2 + A_3, \ldots,\ b_k = \sum_{i=1}^{k} A_i \ldots$$

Passemos ao cálculo da área do retângulo R_i, cuja base é $c_i = a_i - a_{i-1}$ e cuja altura é $h_i = \dfrac{1}{a_{i-1}}$. Calculemos:

$$c_i = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{i} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{i-1} = \left(1=\frac{1}{n}\right)^{i-1}\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{n} \qquad \text{e}$$

$$h_i = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{i-1}}. \qquad \text{Portanto}$$

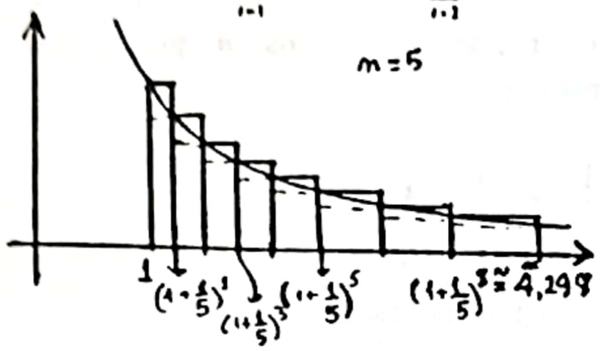
$$R_i = c_i h_i = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{i-1}} = \frac{1}{n} \qquad \text{para todo } i = 1,2,3,\ldots$$

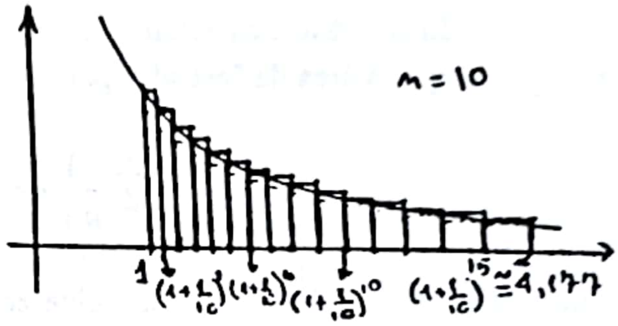
Ou seja, para as áreas dos retângulos R_i vale a mesma propriedade descoberta por St. Vicent, relativa às regiões A_1, A_2, A_3, ..., a saber, todos eles têm a mesma área $\dfrac{1}{n}$. Portanto, enquanto as áreas embaixo das "escadas" (R_1 + R_2 + R_k) por eles determinadas crescem em PA, os valores das abcissas dos "pés da escada" (a_k) crescem em PG. Vejamos o que acontece com as áreas da escada dos r_i, que "encostam na hipérbole por baixo". Neste caso, a base do r_i é a mesma c_i anterior, sendo suas alturas k_i menores: $k_i = \dfrac{1}{a_i}$. Calculando a área:

$$r_i = c_i k_i = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{i}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n+1}$$

Novamente, as áreas r_i são todas iguais para todo i = 1,2,3,... e portanto as áreas da "escada de baixo" (r_1 + r_2 + ... + r_k) crescem em PA à medida que as abcissas (a_k) dos "pés das escadas" crescem em PG.

Observem que, quanto maior for o n fixado, melhor será a aproximação da área $b_t = \sum_{i=1}^{t} A_i$ por $\sum_{i=1}^{t} R_i$ ou $\sum_{i=1}^{t} r_i$.





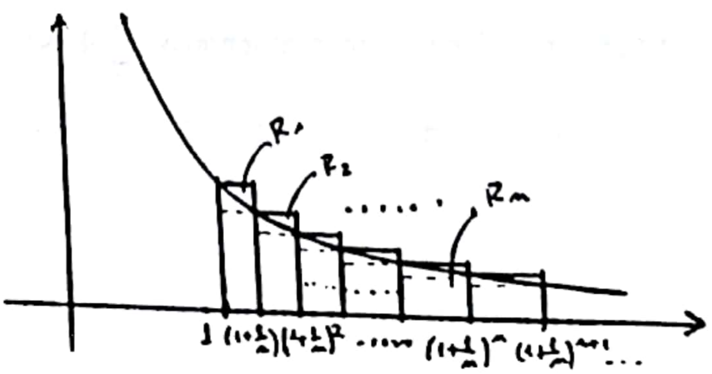
Os cálculos feitos para as áreas dos retângulos não provam o resultado estabelecido por St. vicent, mas talvez o torne mais "aceitável" no caso particular analisado, levando-se em conta a observação imediatamente anterior e o fato de que fixamos inicialmente o n de forma arbitrária e, portanto, podemos torná-lo muito grande para obter boas aproximações de A_i por R_i ou r_i.

Passemos ao número e. No início desta seção, foi referido que o número e pode ser definido geometricamente como sendo o valor da abcissa para a qual a área representada pela função logaritmo natural vale exatamente 1. Voltemos, então, aos retângulos R_i e r_i para tentar avaliar o valor da abcissa que torna a área sob o gráfico da hipérbole igual a 1. Vimos que

$$R_i = \frac{1}{n} \quad e \quad r_i = \frac{1}{n+1} \qquad \text{para todo } i = 1,2,3,4,...$$

Então, para qualquer n fixado inicialmente, serão necessários n retângulos R_i para obter-se uma "escada" com área 1, já que $n.\frac{1}{n} = 1$. Portanto, o "pé desta escada" será a abcissa a_n, correspondente ao retângulo R_n. Como $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)$ e

$\ln a_n = A_1 + A_2 + ... + A_n \approx R_1 + R_2 + ... + R_n = n$



obtemos uma aproximação para o número e através do número $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Já no caso dos retângulos inferiores r_i, se tomamos os n primeiros $r_1, r_2, \ldots, r_n$, a área da "escada" por eles formado será:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1} = n.\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

Juntando todas estas informações, obteremos as seguintes desigualdades:

Sendo $i = 1,2,3,\ldots,$ $0 < r_i < A_i < R_i$ e, portanto

$0 < \sum_{i=1}^{n} r_i < \sum_{i=1}^{n} A_i < \sum_{i=1}^{n} R_i$ ou $0 < \frac{n}{n+1} < \sum_{i=1}^{n} A_i < 1$ pelos cálculos anteriores.

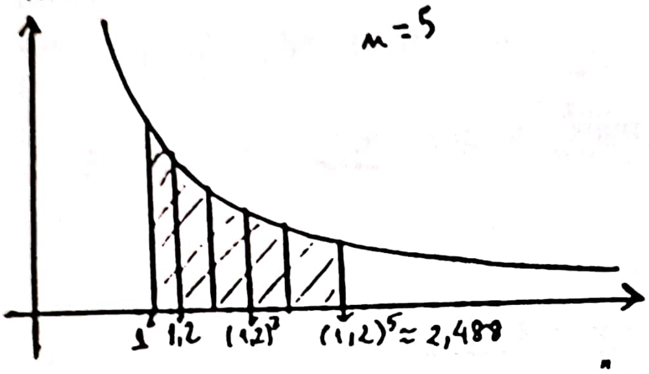
Passando estes termos das desigualdades ao limite quando n tende para $+\infty$, obtemos:

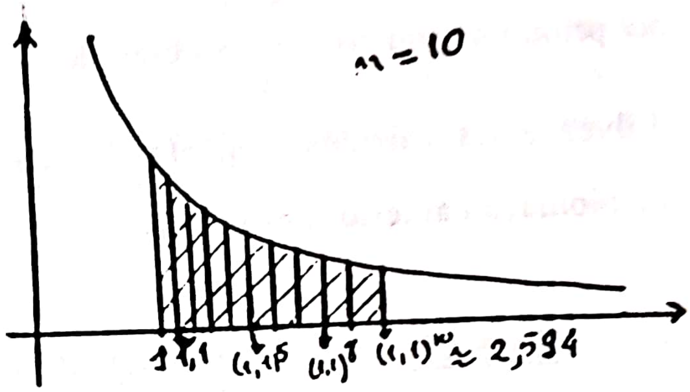
$$1 = \lim_{n\to+\infty} \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i \leq \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

ou seja, podemos concluir, pelo teorema do confronto, que:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i = 1$$

Mas já havíamos visto que a área A_n é delimitada, à direita, pela reta $x = a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, onde a_n é o "pé da escada de n degraus". Assim, na medida em que deixamos n crescer, a área correspondente à $\sum_{i=1}^{n} A_i$ vai ficando delimitada constantemente pelo gráfico de hipérbole, pelo eixo-x, pela reta $x = 1$ e, variavelmente à direita, pela reta $x = a_n$.





Ora, a área limite, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = 1$, será delimitada, à direita, pela reta

$x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Chegamos, então, às conclusões desejadas inicialmente, ou seja:

- Se sabemos que $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ então provamos a afirmação do início da secção sobre ser e a abcissa que procurávamos.

- Se definimos e como sendo a abcissa que faz com que tenhamos uma área igual a 1, abaixo do gráfico de $xy = 1$ entre $x = 1$ e $x = e$, então provamos que este número e pode ser calculado como o $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Voltando à notação de integral, obtivemos assim a igualdade:

$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{x}dx = 1$$

Portanto, se é para a função ln funcionar como um logaritmo, fica aprovado que a base deste logaritmo é o número $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

<u>EXERCÍCIO</u>: Retome aos 2 gráficos da pg.__. Calcule os valores de $\sum_{i=1}^{5} R_i$ e $\sum_{i=1}^{5} r_i$ no primeiro gráfico e os valores de $\sum_{i=1}^{10} R_i$ e $\sum_{i=1}^{10} r_i$ no caso do segundo gráfico. Talvez esses cálculos concretos "convença mais" de que $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_i = 1$ do que a manipulação anterior dos limites.

CONCLUSÃO

Retomemos agora o fio da História. Ficou dito anteriormente que a verificação de que a área sob o gráfico de uma hipérbole de 1 até x_0, pode funcionar como logaritmo de x_0, foi publicada em 1649 por A.A. de Sarasa, ligando as idéias de St. Vincent com as de Napier. Para melhor situar o tempo histórico vivido por estes personagens, é preciso citar mais alguns dos desenvolvimentos da matemática, que foram conexos e contemporâneos aos que vimos descrevendo, juntamente com seus respectivos créditos.

Figura importante foi, sem dúvida, René Descartes (1596-1650) que, em 1637, introduziu pela primeira vez o simbolismo de potências de expoente inteiro. Também, na sua obra, se pode perceber já o emprego da <u>idéia de função</u>. Outro que também dominava esse último conceito, foi Pierre de Fermat (1601-1670) e que está na origem da determinação dos conceitos de derivada e integral. Observemos que, sem esta última - a integral - o tratamento de áreas de figuras como a que vimos abordando nesta seção era muito complicado, talvez inabordável. Foi Fermat o primeiro a tratar de questão de como efetivamente calcular a área sob o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$. E entramos aí, decididamente na época da criação do Cálculo Diferencial e Integral que, certamente, só foi possível graças à efervecência de todas estas idéias no século XVII. Chegamos, assim, a Isaac Newton (1642-1727) e Leibnitz (1646-1716) que foram os dois criadores, de maneira independente um do outro, dos conceitos de derivada e integral de função de variável real, herdeiros que foram do legado científico de Descartes e de Fermat. Ou seja, potências, exponenciais e logaritmos constituíram o verdadeiro germe para o desenvolvimento do Cálculo e da Análise modernos.

Cabe, finalmente, uma última observação. Apesar da primeira tabela de Napier ter aparecido em 1614 (desenvolvendo idéias sobre a interrelação entre PAs e PGs publicadas desde 1544), da tabela de logaritmos decimais de Briggs ter sido publicado em 1624, somente em 1742 é que surgiu uma exposição sistemática do logaritmo como expoente. Isso foi publicado no livro "Tables of Logarithms", em Londres, por William Gardiner, que propôs a seguinte definição: "O logaritmo "comum" de um número é o índice (expoente) da potência de 10 que é igual ao número". Por mais estranho que possa parecer, a definição de logaritmo que usualmente empregamos na escola do segundo grau levou cerca de 200 anos para poder ser formulada, a partir do momento histórico em que foi percebido ser possível utilizar adições para calcular produtos. Todo esse tempo transcorrido é certamente muito significativo do grau de dificuldades que o conceito abarca.

BIBLIOGRAFIA UTILIZADA

- Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do 2º grau - CENP (cap. 7.5).
- Artigo: "Das Porcentagens aos Logaritmos", de José Jakubovic.
- "The Historical Development of the Calculus" (cap. 6), de C.H. Edwards.
- A History of Numerical Analysis From the 16th trough the 19th century" de H.H. Goldstine.
- "A History of Mathematics" de C. B. Boyer.
- "Logaritmos" de Elon Lages de Lima

e-mail: iole@ime.usp.br

RT-MAT 95-24

Um pouco da história de potências, exponenciais e logaritmos

Iole de Freitas Druck

Junho 1995