

MAP2110 - Notas de aula e exercícios

Apostol Cap 12 - 12.8, 12.9, 12.10, 12.11

Saulo R. M. Barros

Departamento de Matemática Aplicada - IME-USP

Definição: Seja $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ um conjunto de vetores em V_n . ①

O espaço gerado por S , denotado $L(S)$, é formado por todos os vetores X que são combinações lineares dos vetores de S , ou seja, por vetores da forma:

$$X = \sum_{i=1}^k c_i A_i, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que S gera o espaço V_n se $L(S) = V_n$.

Dizemos que S gera um vetor X de forma única se

$$X = \sum_{i=1}^k c_i A_i = \sum_{i=1}^k b_i A_i \implies c_i = b_i, \quad i=1, \dots, k.$$

e que S gera $L(S)$ unicamente se cada vetor em $L(S)$ é gerado de forma única.

Teorema: S gera $L(S)$ unicamente $\iff$ O é gerado de forma única.

Dem: $\Rightarrow$ | Se S gera $L(S)$ unicamente, como $O \in L(S)$, ele é gerado de forma única (com $c_i = 0$, $i=1, \dots, k$).

$\Leftarrow$ | Suponha a existência de um vetor $X \in L(S) \neq 0$.

$$X = \sum_{i=1}^k c_i A_i = \sum_{i=1}^k b_i A_i$$

Logo, $O = X - X = \sum_{i=1}^k (c_i - b_i) A_i$. Como $O = \sum_{i=1}^k 0 A_i$ e O é gerado de forma única, teremos $c_i - b_i = 0$ e $\therefore c_i = b_i$, $i=1, \dots, k$.

(2)

Definição: Um conjunto de vetores $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ é linearmente independente (L.I.) se gera o vetor nulo de forma única. Caso contrário, o conjunto é linearmente dependente (L.D.).

Observações: - Caso $0 \in \{A_1, \dots, A_k\} = S$, S é L.D. ($c \cdot 0 = 0$).

- O conjunto vazio é definido como L.I.

- Se S é L.I. e $T \subset S$ então T é L.I.

(Como $T \subset S$, caso exista combinação linear não trivial, ou seja, com os coeficientes não todos nulos, dos elementos de T gerando o vetor nulo, S também seria L.D., uma vez que os elementos de T estão em S .)

- Caso exista elemento $A_j \in S$ que seja combinação linear dos demais elementos de S , então S é L.D.

$$A_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k c_i A_i \Rightarrow \sum_{i=1}^k \tilde{c}_i A_i = 0 \text{ com } \begin{cases} \tilde{c}_i = c_i, i \neq j \\ \tilde{c}_j = -1 \end{cases}$$

Teorema: Seja $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ L.I. Caso $T = \{B_1, \dots, B_{k+1}\} \subset L(S)$, então T é L.D.

Demonstração: A prova é por indução sobre o número k de elementos de S . Se $k=1$, $A_1 \neq 0$ pois S é L.I.

Como $B_1 = c_1 A_1$ e $B_2 = c_2 A_1$ (pois estão em $L(S)$), com $c_1 \neq c_2$,

temos $c_2 B_1 - c_1 B_2 = 0$, com pelo menos um dos c_i diferente

de zero. Logo $\{B_1, B_2\}$ é L.D.

Suponhamos agora a validade do resultado para $k-1 \geq 1$ (3)
 e mostremos para k . Seja $T = \{B_1, \dots, B_{k+1}\}$ com
 $B_j \in L(S)$, ou seja, $B_j = \sum_{i=1}^k c_{i,j} A_i$, $j=1, \dots, k+1$.

Vamos separar em dois casos:

a) $c_{1,j} = 0$, $j=1, \dots, k+1$. Neste caso, $B_j \in L(S')$,
 com $S' = \{A_2, \dots, A_k\}$. Como S' tem $k-1$ elementos, pela
 hipótese de indução $T' = \{B_1, \dots, B_k\}$ é L.D. e portanto
 T também é.

b) Para algum j , $c_{1,j} \neq 0$. Sem perda de generalidade
 (s.p.d.g.), suponha $j=1$.

Defina $\alpha_j = c_{1,j}/c_{1,1}$

$$\begin{aligned} \text{Assim } \alpha_j B_1 - B_j &= \left(c_{1,j} A_1 + \sum_{i=2}^k \alpha_j c_{i,1} A_i \right) - \left(c_{1,j} A_1 + \sum_{i=2}^k c_{i,j} A_i \right) \\ &= \sum_{i=2}^k (\alpha_j c_{i,1} - c_{i,j}) A_i, \quad j=2, \dots, k+1. \end{aligned}$$

Assim, $T' = \{\alpha_2 B_1 - B_2, \dots, \alpha_{k+1} B_1 - B_{k+1}\}$ é um conjunto de
 k vetores $\in L(S')$, com $S' = \{A_2, \dots, A_k\}$. S' tem $k-1$ elementos
 e S' é L.I. (pois $S' \subset S$). Pela hipótese de indução,
 T' é L.D. Portanto existem coeficientes β_j , $j=2, \dots, k+1$, não
 todos nulos tal que:

$$\sum_{j=2}^{k+1} \beta_j (\alpha_j B_1 - B_j) = 0$$

e portanto $\left(\sum_{j=2}^{k+1} \beta_j \alpha_j \right) B_1 - \sum_{j=2}^{k+1} \beta_j B_j = 0$ é uma combinação

linear dos elementos de T , com coeficientes não todos nulos,
 gerando o vetor nulo. Portanto T é L.D., completando a prova.

(4)

Conjuntos Ortogonais: Um conjunto $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ é ortogonal se seus elementos forem ortogonais entre si, ou seja,
 $A_i \cdot A_j = 0$ se $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, k$.

Teorema: Todo conjunto ortogonal $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ cujos elementos são não nulos é L.I. Além disto, caso $B \in L(S)$ então $B = \sum_{i=1}^k \frac{B \cdot A_i}{A_i \cdot A_i} A_i$ (ou seja, os coeficientes da combinação linear dos elementos de S gerando B são dados por $c_i = \frac{B \cdot A_i}{A_i \cdot A_i}$).

Dem: Suponha $\sum_{i=1}^k c_i A_i = 0$.

$$\text{Então } \left(\sum_{i=1}^k c_i A_i \right) \cdot A_j = 0 = c_j A_j \cdot A_j = c_j \|A_j\|^2$$

$$\therefore c_j = 0, \quad j = 1, \dots, k. \quad \text{e } S \text{ é L.I.}$$

$$\text{Seja agora } B = \sum_{i=1}^k c_i A_i.$$

$$\text{Temos } B \cdot A_j = \left(\sum_{i=1}^k c_i A_i \right) \cdot A_j = c_j A_j \cdot A_j$$

$$\text{e portanto } c_j = \frac{B \cdot A_j}{A_j \cdot A_j}.$$

Obs: Se os elementos de um conjunto ortogonal tiverem norma 1, o conjunto é dito ortonormal.

Se S é ortonormal e $B \in L(S)$ então seus coeficientes na expansão $B = \sum_{i=1}^k c_i A_i$ são $c_i = B \cdot A_i$.

Bases:

(5)

Um conjunto S linearmente independente que gera o espaço V_n é uma base de V_n . Caso S seja ortogonal (ortonormal) dizemos que a base é ortogonal (ortonormal).

Observação: Os vetores unitários $E_1, \dots, E_n$ formam uma base ortonormal de V_n .

Teorema: Considere o espaço vetorial V_n . Então:

- a) Toda base de V_n tem n elementos
- b) Qualquer ^{sub}conjunto L.I. de V_n é parte de uma base
- c) Qualquer conjunto L.I. de V_n com n elementos é uma base de V_n .

Dem: Já vimos que os vetores unitários formam base de V_n (com n elementos).

- a) Mostremos que quaisquer duas bases têm mesmo número de elementos. Suponha então que haja duas bases S e T com r e k elementos respectivamente, com $r > k$.

Como T é base e $r > k$, S tem pelo menos $k+1$ elementos em $L(T) = V_n$. De um teorema anterior temos que S é L.D., contradizendo o fato de ser base. Pelas mesmas razões não podemos ter $r < k$. Portanto $r = k = n$.

- b) Seja agora $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ conjunto L.I. ~~se $k < n$~~ se $L(S) = V_n$ nada há a mostrar, S é base. Se não, $\exists x \in V_n, x \notin L(S)$.

Defina $S' = \{A_1, \dots, A_k, x\}$. Vejamos que S' é L.I. Se não, $\sum_{i=1}^k c_i A_i + \alpha x = 0$, com coeficientes não todos nulos. Necessariamente

$\alpha \neq 0$, caso contrário S seria L.D. Mas então temos, ⑥

$$X = \sum_{i=1}^k \frac{-c_i}{\alpha} A_i, \text{ contradizendo o fato de que } X \notin L(S).$$

Se $L(S') = V_n$ completamos a prova. Caso contrário, podemos acrescentar mais um vetor a S' . Continua-se este processo até chegarmos a n elementos, ~~caso~~ qdo teremos uma base. Caso contrário, obteríamos um conjunto com $(n+1)$ elementos, L.I., contido em $V_n = L(\{E_1, \dots, E_n\})$, contradizendo teorema anterior.

c) Novamente, se o conjunto não gera V_n , poderia ser aumentado a um conjunto L.I. com $(n+1)$ elementos, chegando a uma contradição.

Exercícios:

Dados os vetores $u_1 = (1, -1, 2, 0)$, $u_2 = (2, -1, 1, 2)$, $u_3 = (0, -1, 3, -2)$
 $u_4 = (0, 1, 2, 1)$, determine um subconjunto maximal de

$S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ que seja L.I., verifique se

$\mu = (3, -1, 2, 1)$ e $\nu = (3, -1, 5, 3) \in L(S)$?

Para tal temos que ver se $\sum_{i=1}^4 \alpha_i u_i = 0$ tem solução única
e se $\sum_{i=1}^4 \alpha_i u_i = \mu$, $\sum_{i=1}^4 \beta_i u_i = \nu$ possuem solução.

Vamos usar escalonamento (procurando responder a todas as questões simultaneamente).

$$\begin{array}{c} u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad \mu \quad \nu \\ -2 \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13/5 & 0 \end{array} \right)$$

Concluimos: S é L.I.

Vetores $\{u_1, u_2, u_4\}$ formam conjunto L.I. maximal

$\mu \notin L(S)$ $\nu \in L(S)$

ν pode ser escrito de várias formas como combinação linear de u_1, u_2, u_3 e u_4 e de única maneira como combinação de u_1, u_2 e u_4 . ($\nu = u_1 + u_2 + u_4$)

Exercícios:

Seja $S = \{ \overset{s_1}{(1,1,1)}, \overset{s_2}{(0,1,2)}, \overset{s_3}{(1,0,-1)} \}$ e $T = \{ \overset{t_1}{(2,1,0)}, \overset{t_2}{(2,0,-2)} \}$

Mostre que $L(T) \subseteq L(S)$.

- Basta verificar que os vetores t_1, t_2 de T se encontram em $L(S)$. De fato, $t_1 = 2s_1 - s_2$ e $t_2 = 2s_3$

Logo, se $t \in L(T)$ então $t = at_1 + bt_2$

$$\text{e } \therefore t = a(2s_1 - s_2) + b(2s_3) = 2as_1 - as_2 + 2bs_3 \in L(S).$$

Determine base de V_3 contendo $u_1 = (0,1,1), u_2 = (1,1,1)$.

- Para tal basta acrescentar um vetor u_3 que não pertença a $L(\{u_1, u_2\})$.

$$v \in L(u_1, u_2) \Leftrightarrow v = au_1 + bu_2 = (b, a+b, a+b)$$

Para que $u_3 \notin L(\{u_1, u_2\})$, basta tomar:

$$u_3 = (\alpha, \beta, \gamma), \text{ com } \beta \neq \gamma.$$

Mostre que $L(A \cap B) \subseteq L(A) \cap L(B)$

Seja então $A = \{c_1, \dots, c_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$ e $B = \{c_1, \dots, c_k, b_{k+1}, \dots, b_m\}$

onde $A \cap B = \{c_1, \dots, c_k\}$

$\therefore$ portanto se $v \in L(A \cap B)$, $v = \sum_{i=1}^k a_i c_i \in L(A)$
 $\in L(B)$.

Exemplo mostrando que não são iguais:

$$A = \{(0,1), (1,1)\} \quad B = \{(0,1), (1,0)\}$$

$$A \cap B = \{(0,1)\} \quad L(A \cap B) = \{(0, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad L(B) = L(A) = \mathbb{R}^2$$