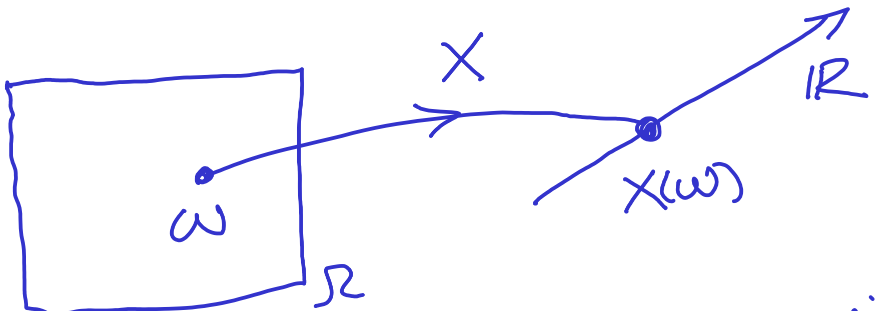
Variáveis Aleatórias Discretas

Começamos relembrando alguns resultados já vistos sobre variáveis aleatórias discretas.

Parte I
(segunda versão)

Variável Aleatória: *Uma variável aleatória é basicamente uma função qualquer do espaço amostral* Ω *com valores em* $\mathbb{R}$.



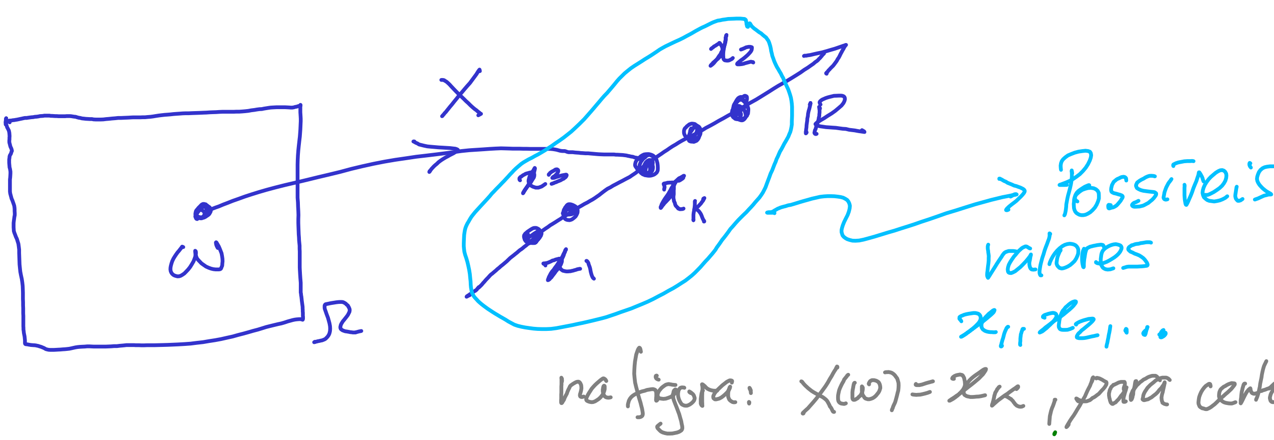
$X : \Omega \to \mathbb{R}$

variável aleatória

Uma variável aleatória, que vamos representar por letras maiúsculas X, Y, W, ... essencialmente "codifica" os resultado dos experimento aleatório por números reais. Essas variáveis aleatórias podem ser dependentes ou não, como veremos depois.

Caso discreto: *vamos começar com o caso mais simples, quando a variável aleatória pode assumir apenas valores num conjunto discreto.*

(o conjunto de valores possíveis é finito ou infinito enumerável)



na figura: $X(\omega) = x_k$, para certo k.

O conjunto imagem de uma variável aleatória discreta X

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ *, dado por* $\{X(\omega);\ \omega \in \Omega\} = \{x_1, x_2, \dots\}$

é enumerável.

Obs: lembre que um conjunto A é dito "enumerável" se existe uma maneira de selecionar todos os elementos de A, em alguma sequência, tal que todos esses elementos sejam eventualmente escolhidos.
Mais precisamente, existe $f: \mathbb{N} \to \Omega$, *sobrejetora, onde* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *representa os números naturais.*

Notação: se uma variável X só pode assumir os valores $\{x_1, x_2, \ldots\}$ *vamos escrever:*

$$X \in \{x_1, x_2, \ldots\}$$

A informação importante sobre uma v.a. discreta X é sua

Distribuição de probabilidades: *quais são as probabilidades de cada valor possível; ou seja, como são distribuidas a probabilidade total, igual a 1, entre esses valores.*

Se $X \in \{x_1, x_2, \ldots\}$ então a coleção $\{p_1, p_2, \ldots\}$ com

$$p_i \equiv P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, \quad 0 \leq p_i \leq 1$$

"indica que é uma definição"

é dita Distribuição de Probabilidades de X

Note que: $P(X \in \{x_1, x_2, \ldots\}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = \boxed{\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1}$

Obs: A distribuição de probabilidade de uma v.a. X também pode ser definida pela ***Função Distribuição Acumulada de Probabilidade:***

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$

com $$F_X(x) \equiv P(X \leq x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

definição

Para toda v.a. X temos as seguintes propriedades:

1) $\lim_{x \downarrow -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \uparrow +\infty} F_X(x) = 1$

2) $F_X(x)$ é uma função não decrescente, isto é

se $a<b$ então $F_X(a) \leq F_X(b)$

3) F_X é uma função "contínua à direita"

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \text{com } \Delta x > 0}} F_X(x+\Delta x) = F_X(x)$$

Para v.a. discretas, o mais natural é fixar diretamente a

Distribuição de probabilidades: $\{p_i = P(X=x_i)\}_{i \geq 1}$

Vejamos alguns exemplos importantes.

Alguns exemplos:

1) **Bernoulli(p) :** *Dizemos que uma variável aleatória (v.a.) X tem distribuição Bernoulli com parâmetro* $p \in [0,1]$ *se ela só pode assumir dois valores: 0 ou 1*

$X \in \{0,1\}$; 1 = "sucesso"
0 = "fracasso"

sendo que

$P(X=1) = p$ p = probabilidade de "sucesso"
$P(X=0) = 1-p$ $1-p$ = probabilidade de "fracasso"

Notação: escrevemos $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

"tem distribuição" parâmetro da Bernoulli

Obs: X é o resultado de lançar uma moeda com probabilidade p de sair cara ("sucesso") e prob $1-p$ de sair coroa ("fracasso").

2) **Uniforme em** $\{1,2,\dots,N\}$: $U(\{1,2,\dots,N\})$

Dizemos que X tem distribuição uniforme no conjunto $\{1,2,\dots,N\}$ se

$$P(X=i) = \frac{1}{N}, \quad 1 \le i \le N$$

Notação: $X \sim U(\{1,2,\dots,N\})$

3) Geométrica com parâmetro p, $p \in [0,1]$

Suponha que lanço uma moeda, com probabilidade p de "sair cara", "sucesso", um número arbitrariamente grande de vezes, independentemente.

Seja X = "número de lançamentos até encontrar cara pela primeira vez"

Se estamos apenas interessados no número de lançamentos até sair "cara" pela primeira vez, podemos tomar

Espaço amostral $\Omega = \{ 1, 2, \dots \}$

letra grega Omega maiúscula

Observação: *no pdf anterior imaginamos que o experimento em questão fosse (como agora) "lançar uma moeda um número infinito de vezes" mas poderíamos estar enteressados em eventos complicados como "quais foram os primeiros N resultados", para qualquer número inteiro N maior ou igual a um. Neste caso assumimos que o espaço amostral descrevesse a sequência INFINITA de lançamentos, que não é enumerável como comentamos.*

Vamos simplificar agora: só queremos saber quantos lançamentos foram necessários até encontrar a primeira cara. Neste caso basta considerar o espaço amostral = { 1, 2, ... }.

Se {k} denota o evento "saiu cara pela primeira vez apenas no k-ésimo lançamento" temos (pela independência)

$$P(\{k\}) = (1-p)^{k-1}\,p$$

{k} = "saiu coroa nos primeiros k-1 lançamentos e cara no k-ésimo lançamento"

Como {X=k} também denota esse mesmo evento

Temos

$P(X=k) = p_k$ com

$p_k = (1-p)^{k-1} p \,,\; k \geq 1 \,,$ uma "sequência geométrica"

Precisamos verificar que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

Resultado auxiliar: considere $a_\ell = x^\ell \,,\; \ell \geq 0$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} x^\ell}_{\text{que significa?}} = ? \quad \text{; existe para todo } x \in \mathbb{R} ?$$

$\hookrightarrow f(x) = \lim_{N \uparrow \infty} \sum_{\ell=0}^{N} x^\ell$ (se existir...)

mas $\sum_{\ell=0}^{N} x^\ell = \dfrac{1 - x^{N+1}}{1-x}$, para $N \geq 1$, e $x \neq 1$ (verifique!)

e, como $\lim_{N \uparrow \infty} x^{N+1} = 0$ se $|x| < 1$, temos

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{se} \quad |x| < 1 \qquad ☆$$

obs: o que acontece se $|x| \geq 1$?

Então, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{\ell=0}^{\infty} (1-p)^{\ell}$

por $\star$ com $x = 1-p$, $|x|<1$ se $p \in (0,1]$

$$\stackrel{\downarrow}{=} p \frac{1}{1-\underbrace{(1-p)}_{x}} = 1 \quad \text{se } 0 < p \leq 1$$

e se $p=0$?

4) *Binomial com parâmetros n e p :*

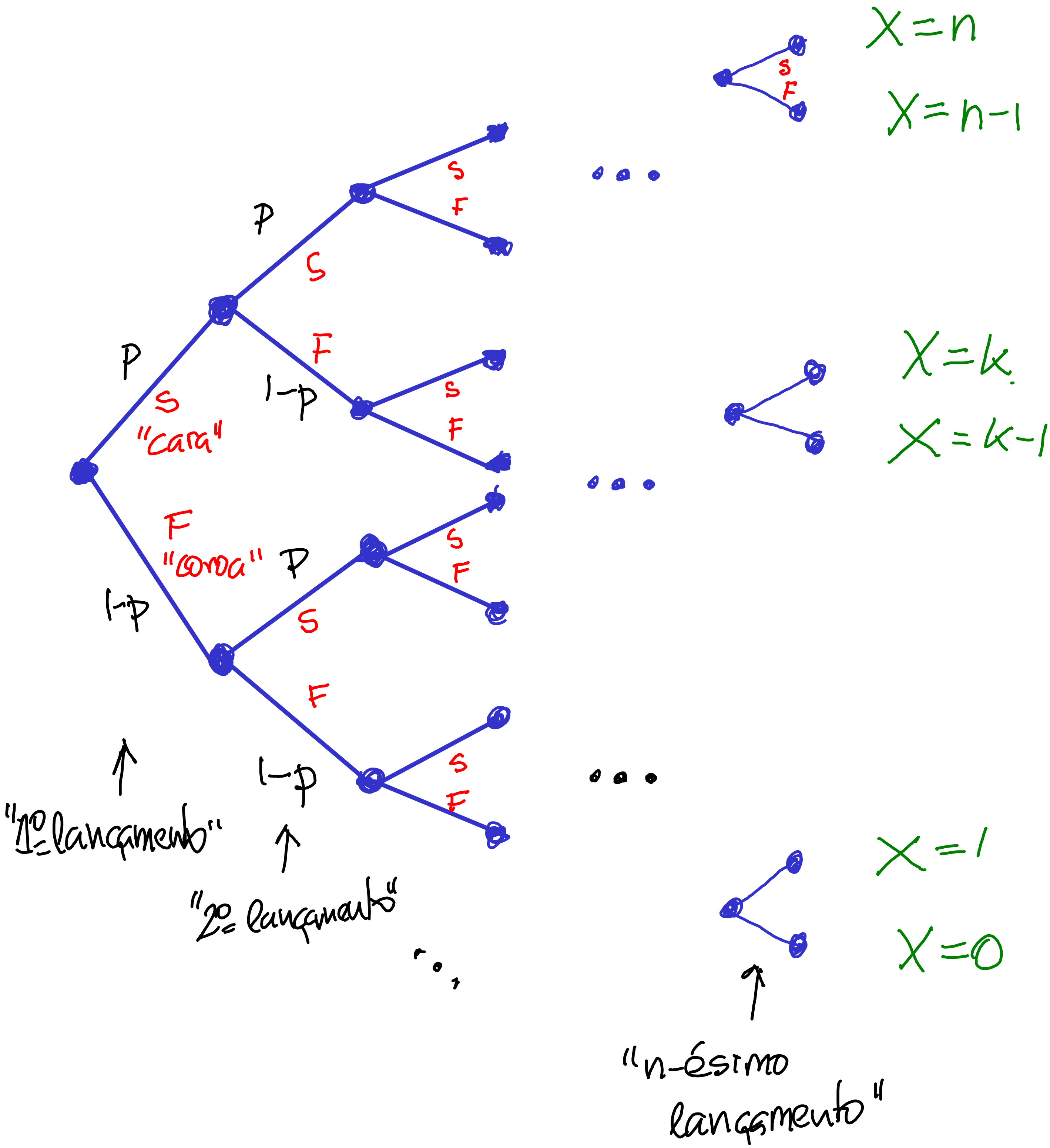
Suponha que lanço uma moeda, com probabilidade p de sucesso, n vezes, independentemente.

Seja X = "número de vezes que observo cara nos n lançamentos"

Então $X \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

ou seja, posso observar desde 0, "nenhuma cara nos n lançamentos", até n caras, "todos os n lançamentos resultando em cara".

Para determinar a distribuição de probabilidades de X podemos usar um "diagrama em árvore", ou "diagrama de possibilidades":



$\{X=k\}$ = "conjunto de todas as trajetorias neste diagrama zig-zag que sobem ("sucesso") k vezes e descem ("fracasso") n-k vezes.

Neste diagrama zig-zag, considere uma particular trajetória com k sucessos (e n-k fracassos).

A probabilidade desta trajetória, como discutido acima,

é dada por $p^k(1-p)^{n-k}$. *Ou seja, é a mesma prob. para toda trajetória.*

O evento {X=k} vai acontecer se tivermos qualquer uma destas trajetórias com k sucessos e n-k fracassos.

Quantas trajetórias existem? Cada trajetória que tem k sucessos e n-k fracassos é fixada quando escolhemos os k lançamentos, dentre os n, que resultaram em sucessos (e o restante, portanto, em fracassos).

Número de maneiras de escolher k dentre n:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

(Porquê?)

onde $n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\,2\cdot 1$ e $0! = 1$

Então

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$0 \leq k \leq n$$

Obs: precisamos verificar que

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$$

onde $\qquad p_k = P(X=k)$

Binômio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \text{(porquê?)}$$

Usando este resultado:

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (\underbrace{p}_{a} + \underbrace{(1-p)}_{b})^n$$

$$= 1$$

Valor Esperado de uma variável aleatória discreta.

Se X é uma variável aleatória discreta com

$$X \in \{x_1, x_2, \dots\}$$

então seu valor esperado, denotado por E(X), é definido por:

$$E(X) = \sum_{k} x_i \, P(X = x_i)$$

(EX para simplificar a notação)

soma sobre todos os valores possíveis

obs: note que E(X) é uma média ponderada dos valores possíveis de X e a ponderação de cada valor é a sua probabilidade. Note tambem que a soma dessas ponderações é igual a 1.

Motivação desta definição: *suponha que X = "quanto você ganha em cada rodada de certo jogo"; você pode ganhar x_1 ou x_2 ou ... reais em cada rodada; depois de MUITAS rodadas (digamos N)*

quanto você ganha POR RODADA?

Resposta: não sei, pois o valor é aleatório para cada N finito.
Mas se N vai ficando cada vez maior
(Teorema: Lei dos grandes Números)
este valor vai ficando cada vez mais próximo de E(X).

Valor esperado nos exemplos.

1) Bernoulli(p): se X ~ Bernoulli(p), então

$P(X=1) = p$; $P(X=0) = 1-p$ e

$$\boxed{EX = 1 \cdot P(X=1) + 0 \cdot P(X=0) = p}$$

2) Uniforme em {1,2,...,N}: se X ~ U({1,2,...,N}) então

$P(X=i) = 1/N$, $1 \leq i \leq N$

$$\boxed{EX = \sum_{i=1}^{N} i \cdot \frac{1}{N} = \frac{(1+2+\ldots+N)}{N} = \frac{N+1}{2}}$$

Obs: $\underbrace{1+2+3+\ldots+(N-1)+N}_{\text{soma } N+1} = \frac{N(N+1)}{2}$ (verfique!)

soma N+1

soma N+1

de forma que $EX = \frac{N+1}{2}$

3) Geométrica(p): se X ~ Geométrica(p)

$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$, $k \geq 1$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

Resultado auxiliar: Como $\frac{d}{dx}(x^k) = k x^{k-1}$, $k \geq 1$

derivada

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^k) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)$$

$\frac{d}{dx}(x^0) = 0$

¿ Posso "tomar a derivada em evidência"?

Agora:

$$\frac{d}{dx}\left(\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

vimos antes

curso de cálculo

e então, calculando para $x = 1-p$, temos

$$\boxed{EX = p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}}$$

4) Binomial(n,p): se X ~Binomial(n,p)

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , \quad 0 \leq k \leq n$$

com
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \quad , \quad n! = n.(n-1)\ldots 2.1$$
$$0! = 1$$

e
$$EX = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k \,.\, n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!\,(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np. \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(\underbrace{n-1-(k-1)}_{n-k})!\,(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{\overbrace{n-1-(k-1)}^{n-k}}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}$$

(mudando o índice da soma para $\ell = k-1$)

$$= \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell}$$

$$= (p + (1-p))^{n-1} = 1$$ (Binômio de Newton)

De forma que, se X ~Binomial(n,p)

$$\boxed{EX = np}$$