Campo Electromagnético Produzido por Cargas em Movimento - II

→[B. Thidé; Electromagnetic Field Theory; Sec. Edition; Section 6.5]

[J. Frenkel; Princípios da Eletrodinâmica Básica; Cap. 8]

[W. Panofsky and M. Phillips; Classical Electricity and Magnetism; Chap. 19]

Potenciais de Liénard-Wiechert

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{s}\right]_{ret};\ \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\vec{v}_q}{s}\right]_{ret};$$

$$s = R - \vec{R}\cdot\vec{\beta};\ \ \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'(t');\ \ t'_{ret} = t - \frac{R}{c} = t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'(t'_{ret})|$$

Campos

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\nabla\phi(\vec{r},t) - \frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t};$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \nabla\times\vec{A}(\vec{r},t)$$

Problema: dependência intrínseca dos potenciais em $(\vec{r}, t)$ através de t'_{ret}

$\nabla \rightarrow$ derivadas parciais com relação a (x, y, z) mantendo $t = const$ e não $t'_{ret} = const$

$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow$ derivada parcial com relação a t mantendo $\vec{r} = const$ e não $\vec{r}'(t'_{ret}) = const$

Solução

- Método do operador diferencial: exprimir $(\partial/\partial t)_{\vec{r}}$ e ∇_t em termos de derivadas mantendo $\vec{r}$ e t'_{ret} fixos (Thidé 6.5.2.1)
- Método direto: escrever diretamente os potenciais em termos de $(\vec{r}, t)$ (Thidé 6.5.2.2)

Método do operador diferencial

Nota: nas derivações a seguir vamos retirar o índice ret de t'_{ret} para facilitar a notação

A relação implícita que define o tempo retardado pode ser expressa com duas relações para R:

$$R = \left[\sum_i \left[x_i - x_{qi}(t')\right]^2\right]^{1/2} \rightarrow \left(\frac{\partial R}{\partial t'}\right)_{\vec{r}} = -\frac{\sum_i (x_i - x_{qi}) \frac{dx_{qi}}{dt'}}{R} \therefore \left(\frac{\partial R}{\partial t'}\right)_{\vec{r}} = -\frac{\vec{R} \cdot \vec{v}_q}{R}$$

$$t' = t - \frac{R}{c} \to R = c(t - t') \to \left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \left(\frac{\partial R}{\partial t'}\right)_{\vec{r}} \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = c\left[1 - \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_{\vec{r}}\right]$$

$$\therefore \left[c + \left(\frac{\partial R}{\partial t'}\right)_{\vec{r}}\right]\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = c \to \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}_q}{cR}} \therefore \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \frac{R}{s}$$

Este último resultado nos permite fazer a transformação de $\partial/\partial t$ para $\partial/\partial t'$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_{\vec{r}} \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)_{\vec{r}} \therefore \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \frac{R}{s}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)_{\vec{r}}$$

Vamos agora considerar o operador $(\nabla\ )_t$. Outra vez, partindo da expressão $R = c(t - t')$,

$$(\nabla R)_t = \sum_i \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{t'} \left[\sum_j \left(x_j - x_{qj}(t')\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\partial R}{\partial t'}\right)_{\vec{r}} (\nabla t')_t = -c(\nabla t')_t$$

$$\therefore \sum_{i,j} \hat{e}_i \frac{(x_j - x_{qj})\delta_{ij}}{R} = \frac{\vec{R}}{R} = -\,c\left[1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R}\right](\nabla t')_t \Longrightarrow \boxed{(\nabla t')_t = -\frac{\vec{R}}{cs}}$$

Este resultado nos permite escrever

$$(\nabla\,)_t = (\nabla t')_t \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)_{\vec{r}} + (\nabla)_{t'} \Longrightarrow \boxed{(\nabla\,)_t = (\nabla)_{t'} - \frac{\vec{R}}{cs}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)_{\vec{r}}}$$

Gradiente do potencial escalar

$$(\nabla\phi)_t = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\left(\nabla\frac{1}{s}\right)_{t'} - \frac{\vec{R}}{cs}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\frac{1}{s}\right)_{\vec{r}}\right] = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^2}\left[(\nabla s)_{t'} - \frac{\vec{R}}{cs}\left(\frac{\partial s}{\partial t'}\right)_{\vec{r}}\right]$$

Exercício: mostre que $(\nabla s)_{t'} = (\nabla R)_{t'} - \left(\nabla\vec{R}\cdot\vec{\beta}\right)_{t'} = \vec{R}/R - \vec{\beta}$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t'}\right)_{\vec{r}} = \left(\frac{\partial R}{\partial t'}\right)_{\vec{r}} - \left(\frac{\partial}{\partial t'}\vec{R}\cdot\vec{\beta}\right)_{\vec{r}} = -\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{R} - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\sum_i\left[x_i - x_{qi}(t')\right]v_{qi}\right)_{\vec{r}}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial s}{\partial t'}\right)_{\vec{r}} = -\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{R} + \frac{v_q^2}{c} - \frac{\vec{R}\cdot\dot{\vec{v}}_q}{c}\,; \qquad \dot{\vec{v}}_q = \frac{d\vec{v}_q}{dt'}$$

Derivada temporal do potencial vetor

$$\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{R}{s}\left(\frac{\partial}{\partial t'}\frac{\vec{v}_q(t')}{s}\right)_{\vec{r}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3}\left[Rs\dot{\vec{v}}_q - R\vec{v}_q\left(\frac{\partial s}{\partial t'}\right)_{\vec{r}}\right]$$

Exercício:

a) Utilizando as expressões obtidas para $(\nabla s)_{t'}$ e $(\partial s/\partial t')_{\vec{r}}$, substitua $(\nabla\phi)_t$ e $\left(\partial\vec{A}/\partial t\right)_{\vec{r}}$ na expressão para o campo elétrico e obtenha

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{s^3}(\vec{R} - R\vec{\beta})(1-\beta^2)\right]_{ret} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\frac{1}{s^3}\vec{R}\times\left[(\vec{R} - R\vec{\beta})\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right]_{ret}}$$

b) Calculando o rotacional do potencial vetor, mostre que

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\left[\frac{\vec{R}}{R}\right]_{ret}\times\vec{E}(\vec{r},t)}$$

Observações

1. Nessas expressões os campos são calculados na posição de observação $\vec{r}$ e no instante t. No entanto, todas as grandezas entre colchetes são calculadas no instante retardado, especificado de forma implícita pela relação $t'_{ret} = t - |\vec{r} - r'(t'_{ret})|/c$.
2. O primeiro termo da expressão para o campo elétrico decai com o inverso do quadrado da distância $(s \propto R)$ e é denominado *campo de indução.*
3. O segundo termo da expressão para o campo elétrico decai com inverso da distância e é denominado *campo de radiação.*