Lista 8

Cálculo - FAU

Monitora - Juliane Trianon Fraga

Os exercícios dessa lista foram retirados do livro *Um Curso de Cálculo, Volume 1*, *Hamilton Luiz Guidorizzi*, *5ª edição.* Serão indicadas as seções de onde cada exercício foi retirado, mas as numerações não serão as mesmas.

É necessário justificar as passagens na solução dos exercícios abaixo.

Seção 9.6

Exercício 1. Estude a função dada com relação a máximos e mínimos locais e globais.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(b) $f(x) = e^x - e^{-3x}$

(c) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$

(d) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$

(e) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, $x \in [0, \pi]$

(f) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^3}{3}$

(g) $y = e^{\frac{x-1}{x^2}}$

(h) $y = \sqrt[3]{x^3 - x}$

Exercício 2. Determine as dimensões do retângulo de área máxima e cujo perímetro $2p$ é dado.

Exercício 3. Determine o número real positivo cuja soma com o inverso do seu quadrado seja mínima.

Exercício 4. Determine a altura do cilindro circular reto, de volume máximo, inscrito na esfera de raio R dado.

Exercício 5. Determine a altura do cone circular reto, de volume máximo, e com geratriz a dada.

Exercício 6. Considere a curva $y = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Traçar uma tangente à curva tal que a área do triângulo que ela forma com os eixos coordenados seja mínima.

Exercício 7. Determine o retângulo de área máxima e lados paralelos aos eixos coordenados, inscrito na elipse $4x^2 + y^2 = 1$.

Exercício 8. Deseja-se construir uma caixa, de forma cilíndrica, de 1 m^3 de volume. Nas laterais e no fundo será utilizado material que custa 10 reais por metro quadrado e, na tampa, material de 20 reais por metro quadrado. Determine as dimensões da caixa que minimizem o custo do material empregado.

Exercício 9. Encontre o ponto da curva $y = \dfrac{2}{x}$, $x > 0$, que está mais próximo da origem.

Exercício 10. Um sólido será construído acoplando-se a um cilindro circular reto, de altura h e raio r, uma semi-esfera de raio r. Deseja-se que a área da superfície do sólido seja 5π. Determine r e h para que o volume seja máximo.

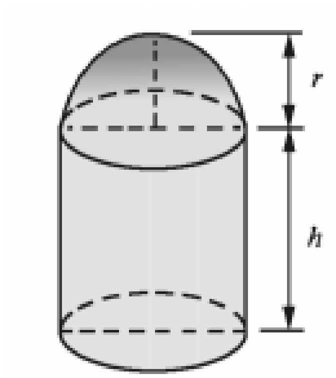

Figura 1: representação esquemática do Exercício 10. Figura retirada do Guidorizzi.

Seção 9.7

Exercício 11. Determine os pontos críticos da função dada e classifique-os (a classificação refere-se a ponto de máximo local, ponto de mínimo local, ou ponto de inflexão).

(a) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$

(b) $x(t) = \sqrt[3]{t^3 - 2t + 1}$

(c) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 2x^3 + x^2 + 1}$

(e) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

(f) $g(x) = x^2 e^{-5x}$

Seção 9.8

Exercício 12. Determine os valores máximos e mínimos (caso existam) da função dada, no intervalo dado.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$ em $[-2, 3]$.

(b) $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ em $[-2, 1]$

(c) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^4}{2} - x^3 + 4x^2 - 4x + 1$ em $[-3, 3]$

(d) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$ em $[0, \pi]$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$ em $[-1, 2]$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2}$ em $]0, 2[$.

Seção 10.2

Exercício 13. Calcule.

(a) $\displaystyle\int x \, \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int 3 \, \mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int (x^2 + x + 1) \, \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int (x^3 + 2x + 3) \, \mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int (2+\sqrt[4]{x})\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int \left(3x^2+x+\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int (3\sqrt[5]{x^2}+3)\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x}\,\mathrm{d}x$

Exercício 14. Seja $\alpha \neq 0$ um real fixo. Verifique que

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}\,\alpha x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha x}\cos\alpha x + k$

(b) $\displaystyle\int \cos\alpha x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\operatorname{sen}\,\alpha x + k$

Exercício 15. Calcule.

(a) $\displaystyle\int e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \cos 3x\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}\,5x\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int (e^{2x}+e^{-2x})\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{3x}}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int \operatorname{sen} \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x$

(h) $\int (\sqrt[3]{x} + \cos 3x) \, \mathrm{d}x$

(i) $\int 5e^{7x} \, \mathrm{d}x$

(j) $\int \left(2 + \operatorname{sen} \frac{x}{3}\right) \mathrm{d}x$

Exercício 16. Verifique que

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arcsen} x + k, \ -1 < x < 1$

(b) $\int \frac{1}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = \arctan x + k$

Exercício 17. Determine a função $y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que

(a) $\frac{dy}{dx} = x^3 - x + 1$ e $y(1) = 1$

(b) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 3x$ e $y(0) = 1$

(c) $\frac{dy}{dx} = e^{-x}$ e $y(0) = 1$

Algumas Respostas

Exercício 1:

(a) 1 é ponto de máx. global; -1 é ponto de mín. global.

(b) Não há ponto de máx. local nem de mín. local.

(c) 1 é ponto de máx. local; 2 é ponto de mín. local

(d) 0 e 2 são pontos de mín. globais; 1 é ponto de máx. local.

(e) $\frac{\pi}{4}$ é ponto de máx. global; π é ponto de mín. global.

(f) -1 e 1 são pontos de máx. locais; 0 e 2 são pontos de mín. locais.

(g) 2 é ponto de máx. global.

(h) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ é ponto de máx. local; $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ é ponto de mín. local

Exercício 2:
Quadrado de lado $\dfrac{p}{2}$.

Exercício 3:
$\sqrt[3]{2}$

Exercício 4:
$\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$

Exercício 5:
$\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Exercício 6:
Tangente no ponto de abscissa $p = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Exercício 7:
Base $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e altura $\sqrt{2}$

Exercício 8:
Raio da base $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3\pi}}$ e altura $\sqrt[3]{\dfrac{9}{\pi}}$

Exercício 9:
$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Exercício 10:
$r = 1$ e $h = 1$.

Exercício 11:

(a) -1 e 4 são pontos de mín. local; 0 é ponto de máx. local.

(b) $-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ é ponto de máx. local; $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ é ponto de mín. local

(c) 1 é ponto de inflexão.

(d) -1 e 0 são pontos de máx. local; $-\dfrac{1}{2}$ é ponto de mín. local

(e) 1 é ponto de mín. local

(f) 0 é ponto de mín. local; $\dfrac{2}{5}$ é ponto de máx. local

Exercício 12:

(a) $f(-2)$ é valor máx.; $f(3)$ é valor mín.

(b) $f(-2)$ é valor mín.; $f(1)$ é valor máx.

(c) $f(-3)$ é valor mín; $f(-2)$ é valor máx.

(d) $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ é valor máx.; $f(0)$ é valor mín.

(e) $f(-1)$ é valor mín; $f(0) = f(2)$ é valor máx.

(f) $f\left(\dfrac{4}{3}\right)$ é valor máx.; não há valor mínimo.

Exercício 13:

(a) $\dfrac{x^2}{2} + k$

(b) $3x + k$

(c) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + k$

(d) $\dfrac{x^4}{4} + x^2 + 3x + k$

(e) $-\dfrac{1}{x} + k$

(f) $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$

(g) $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + k$

(h) $2x + \dfrac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + k$

(i) $x^3 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2x^2} + k$

(j) $\dfrac{15}{7}\sqrt[5]{x^7} + 3x + k$

(k) $\dfrac{x^2}{2} + \ln x + k$

Exercício 15:

(a) $-e^{-x} + k$

(b) $\dfrac{1}{3}\text{sen } 3x + k$

(c) $-\dfrac{1}{5}\cos 5x + k$

(d) $\dfrac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) + k$

(e) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} + k$

(f) $-\dfrac{e^{-3x}}{3} + k$

(g) $-2\cos\dfrac{x}{2} + k$

(h) $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \dfrac{1}{3}\text{sen } 3x + k$

(i) $\frac{5}{7}e^{7x} + k$

(j) $2x - 3\cos\frac{x}{3} + k$

Exercício 17:

(a) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{4}$

(b) $y = -\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{4}{3}$

(c) $y = -e^{-x} + 2$