MAT0130 - Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Professor Antonio Luiz Pereira

Susana Hayashi Alonso - 10170823

3ª prova (25/06/2020)

① a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 6 - 5\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-4) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 4$ (autovalores)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

$y = 1$ : $x + 2.1 = 0 \Rightarrow x = -2$ $\quad \therefore v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovetor para $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0$$

$y = 1$ : $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ $\quad \therefore v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovetor para $\lambda_2 = 4$

Solução geral do sistema: $z(t) = c_1 e^{1.t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x + 4y \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 5 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-6-\lambda)(4-\lambda) + 25 = \lambda^2 + 6\lambda - 4\lambda - 24 + 25 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)(\lambda+1) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = -1$ (autovalor)

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -5x + 5y = 0 \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow x = y$$

$x = 1$ ; $y = 1$ $\therefore$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovetor para $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -5x + 5y = 1$$

$x = 1 \quad -5 + 5y = 1 \Rightarrow 5y = 6 \Rightarrow y = 6/5 \quad \therefore \; w = \begin{pmatrix} 1 \\ 6/5 \end{pmatrix}$ autovetor generalizado para $\lambda = -1$

Solução geral do sistema: $z(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 t e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 6/5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 6y \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(6-\lambda) + 10 = \lambda^2 - 10\lambda + 34 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5+3i \text{ ou } \lambda = 5-3i \text{ (autovalores)}$$

$$\begin{pmatrix} -1-3i & 5 \\ -2 & 1-3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2x + (1-3i)y = 0$$

$y = 1: \; -2x = -(1-3i) \Rightarrow 2x = 1 - 3i \Rightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \quad \therefore \; v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$ autovetor

$$\begin{pmatrix} -1+3i & 5 \\ -2 & 1+3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2x + (1+3i)y = 0$$

$y = 1: \; -2x = -(1+3i) \Rightarrow 2x = 1 + 3i \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \quad \therefore \; v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$ autovetor

Solução geral do sistema: $z(t) = e^{5t}\left(\cos(3t)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \text{sen}(3t)\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right) c_1 +$
$+ e^{5t}\left(\cos(3t)\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \text{sen}(3t)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) c_2$ (para obter uma solução real, utilizamos o princípio da superposição nos resultados complexos)

Scanned with CamScanner

2)a) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)-1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 2$ (autovalores)

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y \quad \therefore v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovetor

$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x - y = 0 \Rightarrow x = -y \quad \therefore v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ autovetor

Portanto, temos como autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$, com seus respectivos autovetores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Uma solução constante terá $\dot{x}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Daí, montamos o sistema:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c_1\\-c_2\end{pmatrix}$$ (onde $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ e $b=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$)

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_2=-c_1 & (1)\\ -x_1+x_2=-c_2 & (2)\end{cases}$$

$(1)\Rightarrow x_1=x_2-c_1 \quad (3)$

$(3)$ e $(2)\Rightarrow -x_2+c_1+x_2=-c_2\Rightarrow c_1=-c_2$

Observamos, então, que $x$ pode ser solução constante se $b=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ com $c_1=-c_2$.

No caso $b=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, por exemplo, temos $x_1-x_2=1$ e, tomando $x_1=1$, temos $x_2=0$, de forma que $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, como esperado.

c) $\dot{x}=Ax+b$, $b=\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}$

A solução geral do sistema homogêneo é $x(t)=e^{0\cdot t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}c_1+e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}c_2$ (pelo item a))

Vamos achar uma solução particular.

Temos a matriz fundamental $\Phi(t)=\begin{pmatrix}1 & e^{2t}\\ 1 & -e^{2t}\end{pmatrix}$, de forma que a solução geral é dada por $x(t)=\Phi(t)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$. Substituindo $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ por uma matriz coluna dependente $U(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix}$ e substituindo $x=\Phi(t)U(t)$ em $\dot{x}=Ax+b$, obtemos, após algumas manipulações, que a solução particular poderá ser dada por $x_p=\Phi(t)\int\Phi^{-1}(t)\,b\,dt$

Calculando $\Phi^{-1}(t)$: $\begin{pmatrix}1 & e^{2t}\\ 1 & -e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+e^{2t}c=1\\ b+e^{2t}d=0\\ a-e^{2t}c=0\\ b-e^{2t}d=1\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a=1\Rightarrow a=1/2\\ c=\frac{1}{2}e^{-2t}\\ 2b=1\Rightarrow b=1/2\\ d=-\frac{1}{2}e^{-2t}\end{cases}\Rightarrow\Phi^{-1}(t)=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2\,e^{-2t} & -1/2\,e^{-2t}\end{pmatrix}$$

Daí $x_p=\begin{pmatrix}1 & e^{2t}\\ 1 & -e^{2t}\end{pmatrix}\int\left(\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2\,e^{-2t} & -1/2\,e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}\right)dt=\begin{pmatrix}1 & e^{2t}\\ 1 & -e^{2t}\end{pmatrix}\int\begin{pmatrix}3/2-5/2\\ 3/2\,e^{-2t}+5/2\,e^{-2t}\end{pmatrix}dt=$

$$=\begin{pmatrix}1 & e^{2t}\\ 1 & -e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-t\\ -2e^{-2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t-2\\ -t+2\end{pmatrix}$$

Portanto, temos como solução geral do sistema não homogêneo

$x(t)=\begin{pmatrix}-t-2\\ -t+2\end{pmatrix}+c_1e^{0\cdot t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

3) a) Quero encontrar matriz S da forma D+N onde D é matriz diagonal, N é matriz nilpotente e $S = M^{-1}AM$. Para isso, observamos que os autovalores de A são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, com respectivos autovetores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-1,0,1)$ e $v_3 = (-1,1,0)$ (obtidos com uso do Wolfram Alpha)

Como há a mesma quantidade de autovalores que autovetores, a matriz A é diagonalizável, obtendo-se:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Daí, temos que S é da forma D+N, onde $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

e nossa matriz M é $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots = \sum_0^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

Como $A = MSM^{-1}$, então $e^A = M e^S M^{-1}$

$$e^S = \begin{bmatrix} \sum \frac{3^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Daí,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = e^A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} = e^A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^3/3 & e^3/3 & e^3/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} = e^A$$

$$e^A = \begin{bmatrix} \frac{2+e^3}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{-1+e^3}{3} & \frac{e^3+2}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{-1+e^3}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3+2}{3} \end{bmatrix}$$

c) $\frac{d}{dt} U(t) = AU(t)$

Pelos autovalores e autovetores obtidos no 3a, a solução geral será

$$U(t) = c_1 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

d) A partir da solução geral do 3c), chegamos na matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & -1 & -1 \\ e^{3t} & 0 & 1 \\ e^{3t} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$, que satisfaz $\frac{d}{dt}\Phi(t)U_0 = A\Phi(t)U_0$. Tomando

$X(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$, temos $X(t) = e^{tA}$. Portanto:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{3t} & -1 & -1 \\ e^{3t} & 0 & 1 \\ e^{3t} & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}+2}{3} & \frac{e^{3t}-1}{3} & \frac{e^{3t}-1}{3} \\ \frac{e^{3t}-1}{3} & \frac{e^{3t}+2}{3} & \frac{e^{3t}-1}{3} \\ \frac{e^{3t}-1}{3} & \frac{e^{3t}-1}{3} & \frac{e^{3t}+2}{3} \end{bmatrix}$$

O resultado é semelhante ao obtido em 3b), apenas multiplicando-se o expoente de e por t.