

Nome: Maxima Kumeri dos Santos N° USP: 10299674

→ Exercício 1

$$(a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} y'' + x y' &= x y \\ y'' + x y' &= y y' \end{aligned} \right\} (d)$$

Considere $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Daí, $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 4$ são autovalores de A .

Primeiro, considere $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 2 \\ 1 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$. Note que $x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$ e supondo-

do $y = 1$ temos $x = -2$ e assim $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ é autovetor de A .

Considere $\lambda = 4$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 & \textcircled{1} \\ x - y = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{2} \Rightarrow x = y$ e supondo $x = 1$ temos $y = 1$ e daí $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é

autovetor de A .

Logo a solução geral do sistema é:

$$z(x) = C_1 e^x \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ com } C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes arbitrárias.}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -6x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -5x + 4y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y/5 + x/6 &= x/6 \quad (1) \\ y/5 + x &= y/5 \quad (2) \end{aligned}$$

Considere $B = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.

Daí, $\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 5 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-6-\lambda)(4-\lambda) + 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ é autovalor de B .

Considere $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -5x + 5y = 0 \Rightarrow x = y \text{ e supondo}$$

$x = 1$ temos $y = 1$ e daí $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é autovetor de B .

Considere também:

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -5x + 5y = 1 \Rightarrow y = \frac{5x+1}{5} \text{ e}$$

supondo $x = 1$ temos $y = \frac{6}{5}$ e daí $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6/5 \end{pmatrix}$ é autovetor de

B .

Logo a solução geral é:

$$z(x) = C_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x C_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 6/5 \end{pmatrix}, \text{ com } C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes arbitrárias.}$$

$$(c) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 6y \end{cases}$$

Considere $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Daí, $\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(6-\lambda) + 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 34 = 0 \Rightarrow \lambda = 5 + 3i, \lambda = 5 - 3i$ são autovalores de C .

Daí para $\lambda = 5 + 3i$: $\begin{pmatrix} -1-3i & 5 \\ -2 & 1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x + (1-3i)y = 0$ e supondo $y = 1$ temos $x = (1-3i)/2$.
daí $v_1 = \begin{pmatrix} (1-3i)/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ é autovetor de C .

E para $\lambda = 5 - 3i$, temos: $\begin{pmatrix} -1+3i & 5 \\ -2 & 1+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x + (1+3i)y = 0$ e supondo $y = 1$ temos $x = (1+3i)/2$.
daí $v_2 = \begin{pmatrix} (1+3i)/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ é autovetor de C .

Logo, a solução geral é:

$$z(t) = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} \cos 3t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 3t \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} \cos 3t \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin 3t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes arbitrárias.}$$

→ Exercício 2

(a) Note que $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (1-\lambda)(1-\lambda) - 1 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 2$ são autovalores de A .

(4)

Considere $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \text{ . Note que } x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

e supondo $x = 1$ temos $y = 1$ e daí $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é autovetor de A .

Considere também $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x - y = 0 \Rightarrow x = -y \text{ e supondo } x = 1$$

temos $y = -1$ e daí $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ é autovetor de A .

(c) Pelo item (a) temos $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$ como autovalores de A e $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $\lambda = 0$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ para $\lambda = 2$.

Logo a solução geral do sistema homogêneo associado é:

$$x(t) = C_1 e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ com } C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes arbitrárias.}$$

Tomamos como matriz fundamental $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ 1 & -e^{2t} \end{pmatrix}$.

Dáí, como $\Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t) = Id$, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ 1 & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + ce^{2t} = 1 & \textcircled{1} \\ b + de^{2t} = 0 & \textcircled{2} \\ a - ce^{2t} = 0 & \textcircled{3} \\ b - de^{2t} = 1 & \textcircled{4} \end{cases}$$

Nota que ① + ③ $\Rightarrow a + ce^{2x} + a - ce^{2x} = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = 1/2.$

$\therefore$ ① $\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{ce^{2x}}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2} e^{-2x}.$

$\therefore$ ② + ④ $\Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}.$

$\therefore$ ② $\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{de^{2x}}{2} = 0 \Rightarrow d = -\frac{1}{2} e^{-2x}.$

Assim $\Phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ \frac{1}{2} e^{-2x} & -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{pmatrix}.$

Daí $X = \Phi(x) \int \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2(e^{-2x}) & -1/2(e^{-2x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} dx =$
 $= \Phi(x) \int \begin{pmatrix} 3/2 - 5/2 \\ 3/2(e^{-2x}) + 5/2(e^{-2x}) \end{pmatrix} dx =$

$= \Phi(x) \int \begin{pmatrix} -1 \\ 4e^{-2x} \end{pmatrix} dx = \Phi(x) \begin{pmatrix} -x \\ -2e^{-2x} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & e^{2x} \\ 1 & -e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ -2e^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 2e^{-2x} + e^{2x} \\ -x - 2e^{-2x} - e^{2x} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X(x) = \begin{pmatrix} -x - 2 \\ -x + 2 \end{pmatrix}$ é uma solução particular do sistema não homogêneo.

Depois, pelo método da variação dos parâmetros temos como solução geral do sistema não homogêneo:

(6)

$$X(x) = \begin{pmatrix} -x - 2 \\ -x + 2 \end{pmatrix} + C_1 e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ com } C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes arbitrárias.}$$

(b) Suponha que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ seja uma solução constante para o problema não homogêneo $\dot{X} = AX + b$. Como b é um vetor constante, considere $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, com b_1 e b_2 constantes arbitrárias.

E como x_1 e x_2 também são constantes arbitrárias, temos $\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Daí } AX + b = \dot{X} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = -b_1 \\ -x_1 + x_2 = -b_2 \end{cases}$$

$$\text{Note que } x_1 - x_2 = -b_1 \Rightarrow x_1 = x_2 - b_1.$$

$$\therefore -x_1 + x_2 = -b_2 \Rightarrow -x_2 + b_1 + x_2 = -b_2 \Rightarrow b_1 = -b_2.$$

Logo, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ pode ser uma solução constante de

$$\dot{X} = AX + b, \text{ quando } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ tal que } b_1 = -b_2, \text{ com}$$

b_1 e b_2 constantes.

→ Exercício 3

(a) Note que $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 3$ são autovalores de A
(Obs: 0 é uma raiz dupla de $-\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0$).

Para $\lambda = 0$ temos $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

E para $\lambda = 3$ temos $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Note que temos três autovalores ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$) e também três autovetores, logo A é diagonalizável.

O, partir dos autovalores e autovetores encontrados, temos:

$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

E assim temos $M^{-1}AM = D + N$, pois:

$M^{-1}AM = D + N \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= N}$.

$= N$

(8)

Logo, $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Temos $e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$

Daí, como $A = MDM^{-1} \Rightarrow e^A = Me^DM^{-1}$, sabemos que

$$e^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore e^A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^3 \\ 0 & 1 & e^3 \\ 1 & 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} (e^3+2)/3 & (e^3-1)/3 & (e^3-1)/3 \\ (e^3-1)/3 & (e^3+2)/3 & (e^3-1)/3 \\ (e^3-1)/3 & (e^3-1)/3 & (e^3+2)/3 \end{pmatrix}.$$

(c) Pelo item (a), temos como solução geral do sistema:

$$x(x) = C_1 e^0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ com } C_1,$$

C_2 e C_3 constantes arbitrárias.

$$\therefore X(s) = \begin{pmatrix} -e^0 & -e^0 & e^{3s} \\ 0 & e^0 & e^{3s} \\ e^0 & 0 & e^{3s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ sC_2 \\ C_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^{3s} \\ 0 & 1 & e^{3s} \\ 1 & 0 & e^{3s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ sC_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos $M(s) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^{3s} \\ 0 & 1 & e^{3s} \\ 1 & 0 & e^{3s} \end{pmatrix}.$

Dai, tomando $U(s) = M(s)M(s)^{-1}$ temos

$$U(s) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^{3s} \\ 0 & 1 & e^{3s} \\ 1 & 0 & e^{3s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^{3s} \\ 0 & 1 & e^{3s} \\ 1 & 0 & e^{3s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(s) = \begin{pmatrix} (2+e^{3s})/3 & (e^{3s}-1)/3 & (e^{3s}-1)/3 \\ (-1+e^{3s})/3 & (e^{3s}+2)/3 & (e^{3s}-1)/3 \\ (-1+e^{3s})/3 & (e^{3s}-1)/3 & (e^{3s}+2)/3 \end{pmatrix}.$$

(d) Sabemos que $U(s) = e^{sA}$, assim

$$e^{sA} = \begin{pmatrix} (e^{3s}+2)/3 & (e^{3s}-1)/3 & (e^{3s}-1)/3 \\ (e^{3s}-1)/3 & (e^{3s}+2)/3 & (e^{3s}-1)/3 \\ (e^{3s}-1)/3 & (e^{3s}-1)/3 & (e^{3s}+2)/3 \end{pmatrix}.$$

Em comparação com o item (b) a única diferença é que aqui temos $3s$ no expoente de e , enquanto no item (b) o expoente de e é s .