

$$1a) \begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = x + 3y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0 =$$

$$= 6 - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}$$

PARA $\lambda = 4$: $\begin{pmatrix} 2-4 & 2 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow -2v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow 2v_1 = 2v_2$$

Assim, podemos escolher $v_1 = 1$ e $v_2 = 1$, desta maneira temos o autovetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ associado a $\lambda = 4$.

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

Para $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 2-1 & 2 \\ 1 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -2v_2$. Assim, se escolhermos $v_2 = 1$, temos $v_1 = -2$ e temos o autovetor

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ associado a } \lambda = 1. \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{1 \cdot t}$$

Assim, a solução Geral: $X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$ será

$$\boxed{X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t}$$

$$1b) \begin{cases} x' = -6x + 5y \\ y' = -5x + 4y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -6-\lambda & 5 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (-6-\lambda)(4-\lambda) + 25 = 0$$

$$= -24 + 6\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 25 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Assim, a 1ª solução ($\lambda = -1$) será: Autovetores repetidos c/ Multiplicidade 2.

$$\begin{pmatrix} -6-(-1) & 5 \\ -5 & 4-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5v_1 + 5v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2. \text{ Assim, se escolhermos } v_1 = 1 \text{ então } v_2 = 1. \text{ Portanto, o 1º autovetor } V_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Agora, vamos encontrar uma segunda solução $X_2(t)$:

$$X_2(t) = [V_1 t + V_2] e^{-t}, \text{ onde } V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ (1º autovetor) e}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix} \text{ (2º autovetor) } \leftarrow \text{Autovetor Generalizado}$$

$$(A - \lambda I)V_2 = V_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5\tilde{v}_1 + 5\tilde{v}_2 = 1 \\ -5\tilde{v}_1 + 5\tilde{v}_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tilde{v}_1 = 1 \text{ e } \tilde{v}_2 = \frac{6}{5} \text{ Logo, } V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6/5 \end{pmatrix} \text{ e } X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6/5 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Desse modo temos:

$$\text{solução Geral: } X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 6/5 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$1c) \begin{cases} x' = 4x + 5y \\ y' = -2x + 6y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (4-\lambda)(6-\lambda) + 10 = 0 =$$

$$= 24 - 4\lambda - 6\lambda + \lambda^2 + 10 = 0 = \lambda^2 - 10\lambda + 34 \begin{cases} \lambda_1 = 5 + 3i \\ \lambda_2 = 5 - 3i \end{cases}$$

Vamos calcular o autovetor $V_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ associado a $\lambda_1 = 5 + 3i$

$$\begin{pmatrix} 4 - (5 + 3i) & 5 \\ -2 & 6 - (5 + 3i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + 3i & 5 \\ -2 & 1 + 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1 + 3i)u + 5v = 0 =$$

$$= \frac{(-1 + 3i)u}{-5} = v \text{ então, se } u = 5 \text{ então } v = 1 - 3i$$

$$\text{Logo, } V_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 - 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Parte Real } V_1} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\text{Parte Imaginária } V_1} = \text{Im}(V_1)$

$$X_1(t) = e^{\alpha t} (\sin \beta t \text{Re}(V) + \cos \beta t \text{Im}(V_1))$$

$$X_2(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t \text{Re}(V_1) - \sin \beta t \text{Im}(V_1))$$

$$\text{com } \begin{cases} \alpha = 5 & \beta = 3 \\ \lambda = \alpha + \beta i \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_1(t) = e^{5t} \left[\sin 3t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos 3t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right]$$

$$X_2(t) = e^{5t} \left[\cos 3t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 3t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right]$$

Assim, a solução geral $X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$

$$\bar{X}(t) = c_1 e^{5t} \left[\sin 3t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos 3t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right] + c_2 e^{5t} \left[\cos 3t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin 3t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right]$$

c_1, c_2 constantes arbitrárias.

2a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

• Autovalores de A: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0 =$$

$$= 1 - \lambda - \lambda + \lambda^2 - 1 = 0 = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix}$$

Assim, os autovalores de A são $\lambda = 2$ e $\lambda = 0$

• Autovetores de A:

Para $\lambda = 2$, temos: $\begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x - y = 0 \Rightarrow y = -x$$

tomando $x = t$, podemos concluir que o vetor associado a $\lambda = 2$ é da forma $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$

Para $\lambda = 0$, temos: $\begin{pmatrix} 1-0 & -1 \\ -1 & 1-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow y = x$$

tomando $x = t$, podemos ter que o vetor associado a $\lambda = 0$ é da forma $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$

2b) Sim, pois sendo b um vetor constante, temos a garantia de continuidade. Lembramos que, o sistema não-homogêneo é dado nas seguintes condições: $x' = P(t)x + q(t)$, onde a matriz $n \times n$ $P(t)$ e o vetor $n \times 1$ $q(t)$ são contínuas em $\alpha < t < \beta$. Como, neste caso, $q(t) = K$, onde K é o vetor constante, temos que $q(t)$ é contínua para todo t , tal que, $\alpha < t < \beta$.

~~2b)~~

2c) $x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

① Vamos resolver o sistema Homogêneo Associado:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x \quad \text{lembramos, do item (a) que as autovalores são: } \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 0$$

e, que, um autovetor associado a λ_1 pode ser $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e que um autovetor associado a λ_2 pode ser $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Assim, $x_c = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pois $e^{0t} = e^0 = 1$

② AGORA, vamos encontrar uma solução particular x_p

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 1 \\ -e^{2t} & 1 \end{pmatrix} \text{ matriz fundamental}$$

$$x_p = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \cdot F(t) dt, \text{ onde } F(t) = b = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2e^{2t}} & -\frac{1}{2e^{2t}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

CONTINUAÇÃO (2C)...

$$\text{Assim } X_p = \begin{pmatrix} e^{2t} & 1 \\ -e^{2t} & 1 \end{pmatrix} \cdot \int \begin{pmatrix} \frac{1}{2e^{2t}} & -\frac{1}{2e^{2t}} \\ 1/2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} dt$$

$$X_p = \begin{pmatrix} e^{2t} & 1 \\ -e^{2t} & 1 \end{pmatrix} \cdot \int \begin{pmatrix} \frac{3}{2e^{2t}} & \frac{5}{2e^{2t}} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} dt$$

$$X_p = \begin{pmatrix} e^{2t} & 1 \\ -e^{2t} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3e^{-2t}}{8} - \frac{5}{4}e^{-2t} \\ \frac{3t}{2} - \frac{5t}{2} \end{pmatrix}$$

$$X_p = \begin{bmatrix} e^{2t} \left(-\frac{3}{8}e^{-2t} - \frac{5}{4}e^{-2t} + \frac{3t}{2} - \frac{5t}{2} \right) \\ -e^{2t} \left(-\frac{3}{8}e^{-2t} - \frac{5}{4}e^{-2t} + \frac{3t}{2} - \frac{5t}{2} \right) \end{bmatrix}$$

$$X_p = \begin{bmatrix} -\frac{13}{8} + \frac{3te^{2t}}{2} - \frac{5te^{2t}}{2} \\ \frac{13}{8} - \frac{3te^{-2t}}{2} + \frac{5te^{2t}}{2} \end{bmatrix}$$

Assim, solução geral é $X = X_c + X_p$

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{13}{8} + \frac{3te^{2t}}{2} - \frac{5te^{2t}}{2} \\ \frac{13}{8} - \frac{3te^{-2t}}{2} + \frac{5te^{2t}}{2} \end{bmatrix}$$

$$3a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalores de A:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda=0 \text{ com multiplicidade } 2 \\ \lambda=3 \end{matrix}$$

• autovetores $\forall \lambda=0$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

• autovetores $\forall \lambda=3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Observe que $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ são L.I.

Assim, temos:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(M) = 3 \neq 0 \text{ logo, } M \text{ é invertível}$$

então, A é diagonalizável, de modo que sendo

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{temos:}$$

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{MATRIZ DIAGONAL}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{MATRIZ NILPOTENTE}}$$

3b) Temos que $A = MDM^{-1}$, onde $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$e^A = Me^{DM}M^{-1}$$

Assim, $e^A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2+e^3}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{-1+e^3}{3} & \frac{e^3+2}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{-1+e^3}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3+2}{3} \end{pmatrix} = e^A$$



3c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = C_1 e^0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^{3t} \\ 1 & 0 & e^{3t} \\ 0 & 1 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad \text{Annim, } M(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^{3t} \\ 1 & 0 & e^{3t} \\ 0 & 1 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

satisfaz $\frac{d}{dt} M(t) X_0 = A M(t) X_0$, $U(t) = M(t) \cdot M(0)^{-1}$

$$\Rightarrow U(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^{3t} \\ 1 & 0 & e^{3t} \\ 0 & 1 & e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{e^{3t} + 2}{3} & \frac{e^{3t} - 1}{3} & \frac{e^{3t} - 1}{3} \\ \frac{e^{3t} - 1}{3} & \frac{e^{3t} + 2}{3} & \frac{e^{3t} - 1}{3} \\ \frac{e^{3t} - 1}{3} & \frac{e^{3t} - 1}{3} & \frac{e^{3t} + 2}{3} \end{bmatrix} = U(t)$$



$$3d) \quad e^{tA} = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^3+2}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3+2}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3+2}{3} \end{pmatrix}$$

Comparando com o item b, Notamos que os resultados são iguais.